Compte-rendu du groupe de travail sur les contraintes géométriques et les preuves en géométrie

Équipe IGG - Opérations 2 et 3

11 octobre 2007

Début : 14h05

Présents : Christophe BRUN, David CAZIER, Jean-François DUFOURD, Nicolas MAGAUD, Pascal MATHIS, Julien NARBOUX, Pascal SCHRECK, Simon E.B. THIERRY

1 Objectifs des réunions des opérations 2 et 3

L'objectif des réunions est de permettre des discussions techniques pour comprendre les thématiques de recherche de chacun et proposer des idées. La borne maximale de durée d'une réunion est fixée à deux heures.

Les réunions déjà prévues auront lieu, sous réserve de modification, aux dates suivantes:

- 15 novembre 2007
- 13 décembre 2007
- 17 janvier 2008

Les dates suivantes seront définies ultérieurement, lorsque les emplois du temps du second semestre seront connus.

2 Liste des thématiques à aborder et des présentations prévues

- décomposition de systèmes de contraintes géométriques (Pascal MATHIS)
- résolution de systèmes de contraintes géométriques sous-contraintes (Simon E.B. THIERRY)
- spécification et preuves dans les hypercartes combinatoires (Jean-François DUFOURD) – 13 décembre
- spécification et preuves d'algorithmes d'enveloppes convexes (Christophe BRUN) – 17 janvier
- méthode des aires (Julien NARBOUX) – 15 novembre

- méthode de Wu (Julien NARBOUX) – 15 novembre
- raisonnement diagrammatique (Julien NARBOUX)
- arrangements / ordres sur les segments (David CAZIER)
- méta-solveurs (Pascal SCHRECK)
- navigation 3D (Thomas JUND)

3 Preuves en géométrie d'incidence projective – Nicolas Magaud

Travaux de Nicolas MAGAUD et Pascal SCHRECK en Coq sur une géométrie 2D sans parallèles (deux droites sont toujours concourantes) où les entités sont les points et les droites.

Bases

L'univers est fondé sur 3 axiomes:

1. $\forall A\ B$: point, $\exists l$: droite, incid $A\ l \wedge$ incid $B\ l$
   il y a une propriété d'unicité de l si $A \neq B$
2. $\forall l_1\ l_2$: droite, $\exists p$: point, incid $p\ l_1 \wedge$ incid $p\ l_2$
   il y a une propriété d'unicité de p si $l_1 \neq l_2$
3. $\exists A\ B\ C\ D$: point tous distincts et non alignés 3 à 3

L'axiome 3 est équivalent á l'axiome 3': $\forall l$: droite, $\exists A\ B\ C$: point tous distincts, incid $A\ l\wedge$ incid $B\ l\wedge$ incid $C\ l \wedge \exists l_1\ l_2$: droite, $l_1 \neq l_2$. Ces deux versions de l'axiome 3 sont par ailleurs équivalentes à leurs pendants duales où points et droites sont inversées, de même qu'alignement et concourance.

Ces 3 axiomes décrivent des structures de plan projectifs. Le plus petit possible est le plan de Fano (*cf.* fig. 1), un plan composé de sept points et sept droites que l'on peut représenter par un triangle avec les centres des trois côtés alignés. Le septième point est le point de concourance des trois médianes.

Egalité de deux entités

Une supposition a été faite, celle de la décidabilité de l'incidence d'un point et d'une droite: $\forall A$: point, $\forall l$: droite, $\{$incid $A\ l\}+\{\tilde{}$incid $A\ l\}$

Deux lemmes sont alors prouvés, sur la décidabilité de l'égalité de deux points ou de deux droites:

- $\forall A\ B$: point, $\{A = B\}+\{A \neq B\}$
- $\forall l_1\ l_2$: droite, $\{l_1 = l_2\}+\{l_1 \neq l_2\}$

La question de la possibilité de démontrer, à partir des trois axiomes, la décidabilité de l'incidence d'un point et d'une droite est ouverte.

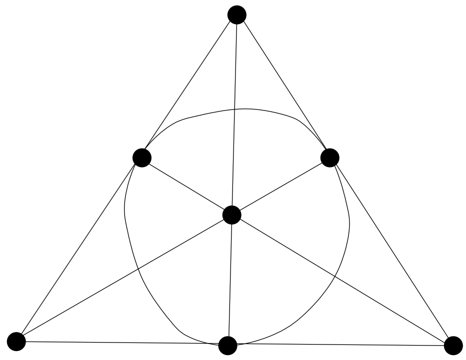

Figure 1: Plan de Fano. Le "cercle" est une droite

Bijection entre deux ensembles de points incidents à deux droites

En considérant l'ensemble des points incidents à une droite l_1 et l'ensemble de points incidents à une droite l_2, il a été démontré qu'il existait une bijection entre ces deux ensembles. Le principe de la preuve est de considérer un point p qui n'est incident á aucune des droites droites. Pour chaque point p_i^1 incident à l_1, on peut construire la droite incidente à p_i^1 et à p. Cette droite et l_2 sont concourantes en un point p_i^2. Il faut ensuite montrer – ce qui a été fait – l'injection et la surjection de la relation entre p_i^1 et p_i^2.

Motivation de ce travail

Ces travaux portent sur des alignements de points et sur la notion de plats. Un plat est un ensemble de points E tel que $\forall A\ B$: point, $A \in E$ et $B \in E$, $\forall l$: droite, incid $A\ l \rightarrow$ incid $B\ l \rightarrow \forall C$: point, incid $C\ l \rightarrow C \in E$.

Dans le plan projectif, les seuls plats possibles sont les points, les droites et le plan tout entier. On y ajoute l'espace en 3D.

Le rang d'un plat est le nombre de points minimums nécessaire pour engendrer un plat. L'application est un test d'égalité de points: soient 3 points; si le rang de l'ensemble est 1, les 3 points sont confondus, si le rang est 2 ils sont alignés, si le rang est 3 ils sont distincts.

L'intérêt des travaux sur l'incidence réside dans la détection de redondances dans un système de contraintes géométriques dues à des théorèmes de géométrie.

Fin : 16h00