Université Louis Pasteur | **Session de Juin 2005**
UFR de Mathématique et Informatique | **IUP GMI 1ère année**

Traitement du Signal

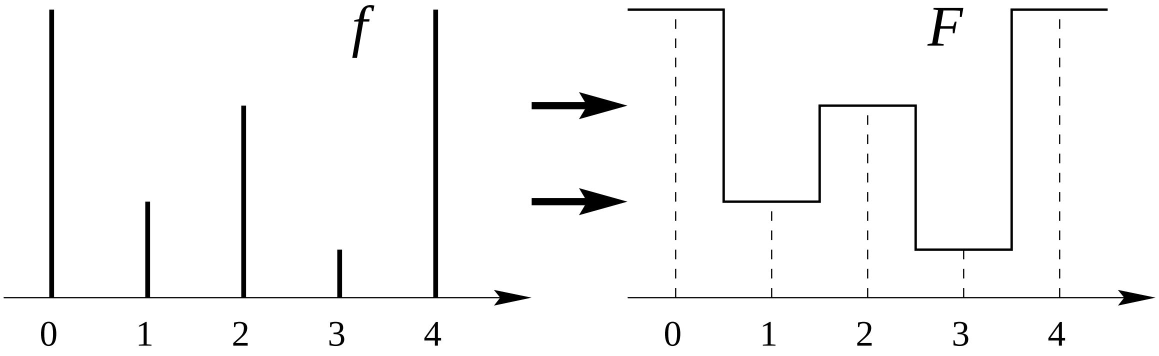
Durée : 3 heures
Responsable : Prof. Christian RONSE
Tous documents et calculettes autorisés
Ordinateurs et téléphones portables interdits

Justifiez soigneusement vos réponses!

(1) Extrapolation par paliers

On a un signal échantillonné (de pas 1) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R} : z \mapsto f(z)$. On l'extrapole en un signal analogique $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto F(x)$ en remplaçant chaque échantillon $f(z)$ en z par un palier de hauteur $f(z)$ allant de $z - 1/2$ à $z + 1/2$, comme illustré ci-dessous. En d'autres termes,

$$\forall z \in Z \ , \ \forall x \in [z - \frac{1}{2}, z + \frac{1}{2}[\ , \qquad F(x) = f(z) \ .$$



Question : Exprimer $\mathcal{F}(F)$, la transformée de Fourier de F, en fonction de $\mathcal{F}(f)$, celle de f.

(2) Double transmission

On a deux signaux analogiques réels S_1 et S_2 à bandes de fréquences limitées ; leurs spectres de fréquences recouvrent les intervalles $[-c_1, +c_1]$ et $[-c_2, +c_2]$. On souhaite les transmettre simultanément par modulation en amplitude avec des fréquences de modulation f_1 et f_2 respectivement. En d'autres termes, on tranmettra à travers le canal le signal

$$M(t) = S_1(t) \cdot \cos(2\pi f_1 t) + S_2(t) \cdot \cos(2\pi f_2 t) \ .$$

Questions :

(i) En supposant que la bande passante du canal (la bande de fréquences sur laquelle la transmission se fait sans perte ni déformation) est de $+C$ à $+D$ pour les fréquences positives (et de $-D$ à $-C$ pour les fréquences négatives), donner la valeur minimum de $D - C$ pour que le signal M transmis contienne toute l'information des signaux initiaux S_1 et S_2 (en d'autres termes, permette de reconstruire S_1 et S_2)

(ii) En supposant $D - C$ dépassant ce minimum, donner les valeurs des fréquences f_1 et f_2 de modulation, de façon que M contienne toute l'information de S_1 et S_2.

(iii) Dessiner les spectres de fréquences de S_1, S_2 et M.

(iv) Expliquer comment à la réception, on pourra reconstruire S_1 et S_2 à partir de M (au moyen de modulation, amplification, filtrage passe-bas et passe-haut).

(3) Echantillonnage

On a un signal audio analogique dont les fréquences sont limitées à 20k Hz. Celui-ci est échantillonné avec une fréquence d'échantillonnage de 35k Hz.

Questions :

(i) Décrire graphiquement l'effet de l'échantillonnage sur le spectre du signal.

(ii) Quelle est l'information perdue dans le signal ?

(iii) Expliquer comment récupérer à partir du signal échantillonné la partie du signal de départ qui n'a pas été perdue.

(4) Retard et corrélation

On a un système linéaire tel que le signal de sortie s_s est une combinaison linéaire de deux retards sur le signal d'entrée s_e, c.-à-d. :

$$s_s(t) = a_1 s_e(t - d_1) + a_2 s_e(t - d_2) \ ,$$

où a_1, a_2, d_1, d_2 sont des constantes *inconnues*. Soit $s_c = s_e \circ s_s$ la corrélation de s_e et s_s, et soient S_e, S_s, S_c les transformées de Fourier de s_e, s_s, s_c.

Questions :

(i) Exprimer S_s et S_c en termes de a_1, a_2, d_1, d_2 et S_e.

(ii) En supposant $d_1 \ll d_2$, expliquer comment la phase de Fourier de s_c permet de déterminer les valeurs de d_1, d_2.

(5) Signaux échantillonnés

On considère un signal échantillonné s_0 avec pas d'échantillonnage égal à 1, c.-à-d. $s_0 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. On définit les signaux $s_1, s_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall z \in \mathbb{Z}, \qquad \begin{array}{l} s_1(z) = \begin{cases} +s_0(z) & \text{si } z \text{ est pair} \ , \\ -s_0(z) & \text{si } z \text{ est impair} \ ; \end{cases} \\ s_2(z) = \begin{cases} s_0(z) & \text{si } z \text{ est pair} \ , \\ 0 & \text{si } z \text{ est impair} \ . \end{cases} \end{array}$$

Question : Donner la relation entre les transformées de Fourier de s_0, s_1 et s_2. (NB : $e^{i\pi} = -1$.)