Université Louis Pasteur
UFR de Mathématique et Informatique

Session de Juin 2003
IUP GMI 1ère année

Traitement du Signal

Durée : 3 heures
Responsable : Prof. Christian RONSE
Tous documents et calculettes autorisés
Ordinateurs et téléphones portables interdits

Justifiez soigneusement vos réponses!

(1) Filtre numérique *(5 points)*
On considère des signaux échantillonnés de la forme $x(t)$ pour t entier relatif. On a un filtre numérique transformant un signal d'entrée $x(t)$ ($t \in \mathbb{Z}$) en un signal de sortie $y(t)$ donné par

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) - \frac{1}{2}x(t-2) + \frac{1}{4}x(t-3) - \frac{1}{8}x(t-4) + \cdots + \left(\frac{-1}{2}\right)^n x(t-1-n) + \cdots \\ &= x(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n x(t-1-n) \quad . \end{aligned}$$

(i) Ce filtre est-il à réponse impulsionnelle finie ou infinie ? Est-il causal ?
(ii) Donner une équation récursive (avec un nombre fini de termes) liant $x(t)$ et $y(t)$.
(iii) Dessiner le diagrame d'un circuit réalisant ce filtre avec des additionneurs et multiplicateurs de signaux, et des délais d'une unité de temps.

(2) Échantillonnage audio *(4 points)*
L'oreille humaine entend les fréquences jusqu'à 20k Hz. On a un signal sonore contenant des fréquences (positives) jusqu'à 40k Hz, qu'on souhaite échantillonner à la fréquence de 50k Hz. Avant l'échantillonnage on appliquera un filtre passe-bas au signal.

Quelles sont les fréquences de coupure possibles pour le filtre passe-bas, telles qu'on puisse reconstruire la partie audible du signal d'origine à partir du signal filtré puis échantillonné ?

(3) Série de Fourier *(3 points)*
On considère la fonction f donnée par

$$f(t) = \sin(t/2) + \cos(t) - \sin(5t/2) \quad .$$

(i) Déterminer sa période.
(ii) Donner sa décomposition en série de Fourier en exponentielles imaginaires, de la forme :

$$f(t) = \sum_{z=-\infty}^{+\infty} c_z \, e^{2\pi i \, zt/T} \quad .$$

(4) Intégrale de Fourier *(6 points)*
Donner la transformée de Fourier de la fonction non périodique f à variable réelle définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{pour } |x| < 1\,; \\ 0 & \text{pour } |x| \geq 1. \end{cases}$$

(5) Cryptage *(5 points)*
Soit f_M une fréquence positive. On a un signal *réel* S dont les fréquences positives vont de f_0 à f_1, où $0 < f_0 < f_1 < f_M$. (Donc le spectre de fréquences de S est inclus dans l'intervalle $[-f_M, f_M]$.)
On applique à S les deux transformations suivantes :

(a) D'abord : modulation en amplitude de fréquence f_M avec double amplitude, c.à.d. on multiplie $S(t)$ par $2\cos[2\pi f_M t]$.

(b) Ensuite : filtre passe-bas idéal à fréquence de coupure f_M.

Le signal résultant aura encore son spectre inclus dans l'intervalle $[-f_M, f_M]$.

(i) Dessiner un spectre possible pour S, et représenter graphiquement l'effet sur ce spectre des deux transformations (a) puis (b).

(ii) Que se passe-t-il si on applique une deuxième fois les deux transformations (a) puis (b) ?