Université Louis Pasteur — **Session de Juin 2002**
UFR de Mathématique et Informatique — **IUP GMI 1ère année**

Traitement du Signal

Durée : 3 heures
Responsable : Prof. Christian RONSE
Tous documents et calculettes autorisés
Ordinateurs et téléphones portables interdits

Justifiez soigneusement vos réponses!

(1) Détection de phase *(6 points)*
On dispose d'un appareillage électronique de traitement de signaux temporels, cadencé par une horloge et possédant les éléments suivants :

(a) *un modulateur d'amplitude cosinusoidal :* celui-ci multiplie un signal $S(t)$ par la fonction cosinusoide $\cos[2\pi f_{mc}t]$, de phase nulle par rapport à la mesure du temps dans l'horloge, et dont la fréquence f_{mc} est réglable par l'utilisateur ;

(b) *un modulateur d'amplitude sinusoidal :* celui-ci multiplie un signal $S(t)$ par la fonction sinusoide $\sin[2\pi f_{ms}t]$, de phase nulle par rapport à la mesure du temps dans l'horloge, et dont la fréquence f_{ms} est réglable par l'utilisateur ;

(c) *des filtres passe bas :* ceux-ci enlèvent d'un signal toutes les fréquences dont la valeur absolue dépasse une fréquence de coupure f_c, et gardent les autres fréquences sans changer leur phase ni leur amplitude, cette fréquence de coupure f_c étant réglable par l'utilisateur ;

(d) un dispositif mesurant l'amplitude d'un signal constant ;

(e) un dispositif permettant de calculer des fonctions trigonométriques et des fonctions trigonométriques inverses.

On a un signal cosinusoidal de la forme $A\cos(2\pi\nu t+\varphi)$, dont la fréquence ν est connue, mais l'amplitude A et la phase φ sont inconnues. Expliquer comment utiliser les fonctionnalités ci-dessus (et avec quels réglages des paramètres) pour mesurer la phase φ par rapport au temps de l'horloge.

(2) Périodisation et transformée de Fourier *(4 points)*
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction non périodique. On construit la fonction périodique g par *périodisation de période 1* de f, c.à.d. g est la somme de tous les translatés de f par des entiers :

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad g(x)=\sum_{z=-\infty}^{+\infty} f(x-z)\ .$$

Donner le rapport existant entre la transformée de Fourier de f et celle de g.

(3) Série de Fourier *(3 points)*
La fonction périodique s à variable réelle est donnée par

$$s(x)=\sin(x/2)+\sin(x/3)\ .$$

(i) Déterminer la période de s.

(ii) Donner la série de Fourier en cosinus et sinus de s.

(4) Transmission sur deux bandes de fréquence *(7 points)*

Entre deux lieux (D : départ et A : arrivée) on a deux canaux X et Y de transmission dont les bandes passantes (intervalles de fréquences positives pouvant être transmises sans pertes ni distorsions) sont respectivement

(x) pour X : de 230k Hz à 430k Hz ;

(y) pour Y : de 280k Hz à 380k Hz.

Au lieu D on dispose de *modulateurs à bande latérale unique* (BLU). Au lieu A on dispose de *démodulateurs à bande latérale unique* et de *filtres passe-bande*. On a en D quatre signaux S_1, S_2, S_3 et S_4 de même durée à transmettre vers A. Les fréquences positives de ces signaux occupent les bandes suivantes :

(1) Pour S_1 : de 0 à 105k Hz ;

(2) Pour S_2 : de 30k Hz à 60k Hz ;

(3) Pour S_3 : de 10k Hz à 70k Hz ;

(4) Pour S_4 : de 20k Hz à 100k Hz.

Expliquer comment, avec les appareillages disponibles en D et A, et avec quels réglages, on peut :

(i) depuis D, transformer les 4 signaux S_1 à S_4 afin de pouvoir le transmettre sans pertes ni distorsions vers A à travers les deux canaux X et Y ;

(ii) en A, transformer les signaux provenant des deux canaux X et Y, afin de restituer les 4 signaux S_1 à S_4 sans pertes ni distorsions.

Illustrer graphiquement les effets des transformations effectuées en (i) et (ii) sur les spectres de fréquences des 4 signaux.

(5) Intégrale de Fourier *(6 points)*

Donner la transformée de Fourier de la fonction non périodique h à variable réelle définie par

$$h(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{pour } |x| < 1\,; \\ 0 & \text{pour } |x| \geq 1. \end{cases}$$