Université Louis Pasteur — **Session de Juin 2001**
UFR de Mathématique et Informatique — **IUP GMI 1ère année**

Traitement du Signal

Durée : 3 heures
Responsable : Prof. Christian RONSE
Tous documents et calculettes autorisés
Téléphones portables interdits

Justifiez soigneusement vos réponses!

(1) Détection de phase *(5 points)*

On dispose des appareillages suivants :

(a) *un modulateur d'amplitude cosinusoidal :* celui-ci multiplie un signal (temporel) $S(t)$ par la fonction cosinusoide $\cos[2\pi f_{mc}t]$, dont la fréquence f_{mc} est réglable par l'utilisateur ;

(b) *un modulateur d'amplitude sinusoidal :* celui-ci multiplie un signal (temporel) $S(t)$ par la fonction sinusoide $\sin[2\pi f_{ms}t]$, dont la fréquence f_{ms} est réglable par l'utilisateur ;

(c) *des filtres passe bas :* ceux-ci enlèvent d'un signal toutes les fréquences dont la valeur absolue dépasse une fréquence de coupure f_c, et gardent les autres fréquences sans changer leur phase ni leur amplitude (cette fréquence de coupure f_c est réglable par l'utilisateur).

(d) un dispositif mesurant l'amplitude d'un signal constant.

(e) un calculateur de fonctions trigonométriques.

On a un signal sinusoidal de la forme $A\cos(2\pi\nu t+\varphi)$, dont la fréquence ν est connue, mais l'amplitude A et la phase φ sont inconnues. Expliquer comment utiliser les appareillages ci-dessus (et avec quels réglages des paramètres) pour mesure la phase φ.

(2) Spectre et modulation *(4 points)*

On a un signal S de la forme

$$S(t)=\sum_{r=1}^{n} A_s\cos(2\pi\nu_r t+\varphi_r),$$

où $0<\nu_1<\ldots<\nu_n$.

(i) *(1 point)* Décrire la transformée de Fourier de S.

(ii) *(1 point)* Exprimer $S(t)\cdot\cos[2\pi f_m t]$, le signal modulé en amplitude par cosinusoide (avec $0<f_m<\nu_1$), sous forme de somme de cosinusoides.

(iii) *(2 points)* On considère S^*, le signal "conjugué" de S, obtenu en déphasant les fréquences positives de $-\pi/2$, et la modulation en bande latérale unique $BLU(f_m,S)$ donnée par

$$BLU(f_m,S)(t)=S(t)\cdot\cos[2\pi f_m t]-S^*(t)\cdot\sin[2\pi f_m t].$$

Exprimer S^* et $BLU(f_m,S)$ sous forme de somme de sinusoides ou de cosinusoides.

(3) Durée de transmission *(3 points)*

On a un signal analogique dont la durée est de 6 minutes et dont les fréquences positives s'échelonnent de 0 à 40k Hz. On a un canal dont la bande de fréquences utiles va de 0 à 120k Hz (pour les fréquences positives).

(*i*) *(1 point)* Quel est la durée minimum nécessaire pour transmettre ce signal à travers ce canal ?

(*ii*) *(2 points)* Donner une méthode simple pour effectivement le transmettre avec cette durée minimum.

(4) Série de Fourier *(4 points)*

Soit α un nombre réel vérifiant $0 < \alpha \leq \pi$. On considère la fonction périodique f_α de période 2π prenant les valeurs suivantes sur la période $[-\pi, +\pi]$:

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x/\alpha & \text{pour } |x| < \alpha\,; \\ 0 & \text{pour } |x| \geq \alpha. \end{cases}$$

Exprimer f_α sous forme de série de sinus et de cosinus.

(5) Système discret *(3 points)*

On considère un système linéaire discret où la sortie $y(t)$ au temps t ($t \in \mathbb{Z}$) dépend des entrées $x(t)$ selon la formule suivante:

$$y(t) = x(t) + x(t-1) + \frac{1}{2}x(t-2) + \frac{1}{4}x(t-3) + \frac{1}{8}x(t-4) + \ldots$$

Donner une équation (récursive) ayant un nombre fini de termes dont ce système est solution, et dessiner un circuit formé d'additionneurs, de soustracteurs, de multiplicateurs, et d'unités de délai, permettant de la réaliser.

(6) Sous-échantillonnage *(5 points)*

Soient S un signal analogique, et S_1 le signal échantillonné avec une fréquence de 10k Hz (échantillons pris aux temps $z/10k$ pour $z \in \mathbb{Z}$). Soit S_2 le signal sous-échantillonné obtenu en ne gardant que les échantillons pairs de S_1 (pris aux temps $z/10k$ pour z pair).

(*i*) *(1,5 point)* Décrire ce que S_2 représente par rapport à S.

(*ii*) *(1 point)* Donner $\mathcal{F}(S_1)$ et $\mathcal{F}(S_2)$, les transformées de Fourier de S_1 et S_2, en fonction de $\mathcal{F}(S)$, celle de S.

(*iii*) *(2,5 points)* Expliquer comment obtenir $\mathcal{F}(S_2)$ à partir de $\mathcal{F}(S_1)$.