Université Louis Pasteur
UFR de Mathématique et Informatique

Session de septembre 2000
IUP GMI 1ère année

Traitement du Signal

Durée : 3 heures
Responsable : Prof. Christian RONSE
Tous documents et calculettes autorisés

Justifiez soigneusement vos réponses!

(1) Filtres numériques

On considère des signaux échantillonnés dans le temps ; la valeur du signal x au temps t est indiquée $x(t)$; ici t est un entier relatif (le pas d'échantillonnage temporel est posé égal à 1). Supposons qu'on veuille réaliser un filtre numérique produisant à partir du signal d'entrée x un signal de sortie y donné par l'équation

$$y(t) = x(t+2) + x(t+1) + x(t) + x(t-1) + x(t-2).$$

(i) Ce filtre est-il à réponse impulsionnelle finie ou infinie ? Est-il causal ?

(ii) Si on construit un dispositif physique mettant en oeuvre un tel filtre, quel est l'instant minimum t' auquel on pourra avoir la valeur $y(t)$?

(iii) Dessinez le diagrame d'un circuit réalisant ce filtre, avec $y(t)$ sortant au temps t' mentionné en (ii). Ce circuit utilisera uniquement des additionneurs et multiplicateurs de signaux, et des délais d'une unité de temps.

(iv) Si on sait que pour tout $t \in \mathbb{Z}$ on a $|x(t)| \leq M$ (où $M > 0$), que peut-on dire de $y(t)$?

(2) Modulation

On sait qu'une ligne téléphonique ne transmet pratiquement pas les basses fréquences. Mais on l'utilise pour transmettre des messages d'ordinateurs, qui constituent des signaux contenant tant des hautes que des basses fréquences.

(i) Expliquez pourquoi on utilise la modulation pour transmettre un tel signal.

(ii) Considérons les deux formes suivantes de modulation (pour une fréquence de modulation f_m) :

(a) *Modulation sinusoidale :* On transmet le signal M donné par

$$M(t) = S(t) \cdot \cos[2\pi f_m t].$$

(b) *Modulation à bande latérale unique (BLU) :* On transmet le signal M donné par

$$M(t) = S(t) \cdot \cos[2\pi f_m t] - S^*(t) \cdot \sin[2\pi f_m t],$$

où S^* est le signal déphasé de $-\pi/2$ pour les fréquences positives, c.à.d.

$$\mathcal{F}(S^*)(\nu) = \begin{cases} -i\,\mathcal{F}(S)(\nu) & \text{pour } \nu > 0, \\ 0 & \text{pour } \nu = 0, \\ +i\,\mathcal{F}(S)(\nu) & \text{pour } \nu < 0. \end{cases}$$

Il est clair que la modulation à bande latérale unique est plus difficile à mettre en oeuvre que la modulation sinusoidale. Pourquoi l'utilisera-t-on ? Donnez un avantage de la modulation à bande latérale unique, et expliquez le sur un exemple concret.

(3) Analyse de Fourier

Donner la transformée de Fourier de la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = e^{-|x|}$. (Conseil : décomposer cette fonction en la partie pour $x < 0$ et celle pour $x \geq 0$.)

(4) Convolution par analyse de Fourier

Soit $\sigma > 0$; on définit la *Gaussienne* d'écart-type σ comme la fonction $G_\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right].$$

On peut montrer que la transformée de Fourier $\mathcal{F}(G_\sigma)$ de G_σ vérifie

$$\mathcal{F}(G_\sigma)(\nu) = \exp\bigl[-2(\pi\sigma\nu)^2\bigr].$$

Utilisez cette information et les propriétés de la transformée de Fourier pour obtenir la convolution de G_{σ_1} par G_{σ_2} pour $\sigma_1, \sigma_2 > 0$. (Attention : un calcul direct par la formule de convolution risque d'être horriblement compliqué !)

(5) Information

Une ligne de communication informatique de type A utilise un cable dont la bande de fréquences utiles est de 2k Hz à 16k Hz, et elle coûte 100F par semaine. Une ligne de type B utilisant un cable à bande de fréquences utiles de 8k Hz à 38k Hz coûte 200F par semaine. Que vaut-il mieux faire : payer 2 lignes de type A, ou une ligne de type B ?

(6) Modulation en amplitude

Dans le système de transmission radio AM par modulation en amplitude, le message radio est multiplié par une onde sinusoidale porteuse de la fréquence associée à la radio. Donc le signal transmis est

$$S(t) \cdot \cos[2\pi\, f_r t],$$

où S est le signal à transmettre aux auditeurs (parole ou musique), et f_r la fréquence de la radio. On suppose que S est filtré en passe-bas, de façon à n'avoir aucune fréquence supérieure à 20k Hz (de toute manière, l'oreille humaine n'entend pas les fréquences au-delà de 20k Hz). Quel est l'écart minimum entre les fréquences f_{r_1} et f_{r_2} de deux radios différentes pour ne pas avoir d'interférences entre les signaux transmis par les deux ?

(7) Série de Fourier

Donner la série de Fourier de l'onde rectangulaire R_α de largeur variable α et de prériode 1, donnée par la formule:

$$R_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq x < \alpha, \\ 0 & \text{pour } \alpha \leq x \leq 1, \end{cases}$$

où $0 < \alpha < 1$.