Université Louis Pasteur | **Session de Mai-Juin 2000**
UFR de Mathématique et Informatique | **IUP GMI 1ère année**

Traitement du Signal

Durée : 3 heures
Responsable : Prof. Christian RONSE
Tous documents et calculettes autorisés

Justifiez soigneusement vos réponses!

(1) Fréquences positives et négatives

Soit S un signal réel unidimensionnel (c.à.d. S est une fonction d'une variable, à valeurs réelles).

(i) De façon générale, donner la relation entre $\mathcal{F}(S)(\nu)$ et $\mathcal{F}(S)(-\nu)$ pour une fréquence $\nu > 0$.

(ii) Pourquoi dans un problème concret concernant des signaux physiques et des dispositifs matériels de transmission, donne-t-on leurs propriétés en termes de fréquences positives, sans parler des fréquences négatives ?

(iii) On suppose S non-échantillonné et périodique de période T, et on a sa décomposition en série de Fourier

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i\, nx/T}.$$

Soit φ_n l'angle de c_n, c.à.d. $c_n = |c_n| e^{i\varphi_n}$. Montrer qu'on a

$$S(x) = c_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \cos\bigl(2\pi \frac{nx}{T} + \varphi_n\bigr).$$

(2) Modulation

On a un canal de transmission dont la bande de fréquences utilisables est de 1k Hz à 3k Hz (en dehors de cette bande, le signal subit des pertes et distorsions). On souhaite transmettre à travers ce canal un signal S à basses fréquences ; les fréquences du spectre de S sont toutes bornées par une fréquence de coupure f_b. On envisage lors de l'émission d'adapter la bande de fréquences de ce signal par modulation, avec une fréquence de modulation f_m, et on hésite entre deux approches :

(a) *Modulation sinusoidale :* On transmet le signal M donné par

$$M(t) = S(t) \cdot \cos[2\pi f_m t].$$

(b) *Modulation à bande latérale unique (BLU) :* On transmet le signal M donné par

$$M(t) = S(t) \cdot \cos[2\pi f_m t] - S^*(t) \cdot \sin[2\pi f_m t],$$

où S^* est le signal déphasé de $-\pi/2$ pour les fréquences positives, c.à.d.

$$\mathcal{F}(S^*)(\nu) = \begin{cases} -i\,\mathcal{F}(S)(\nu) & \text{pour } \nu > 0, \\ 0 & \text{pour } \nu = 0, \\ +i\,\mathcal{F}(S)(\nu) & \text{pour } \nu < 0. \end{cases}$$

Pour ce canal donné, et pour chacune des deux méthodes de modulation :

(i) Représenter graphiquement le spectre de Fourier de S et celui de M en fonction de f_m.

(ii) Déterminer la valeur à choisir pour la fréquence de modulation f_m.

(iii) Donner la plus grande valeur possible de la fréquence maximale f_b du signal S, pour laquelle la transmission peut se faire sans pertes ni distorsions par modulation à travers ce canal.

(iv) Donner une méthode pour démoduler le signal à la réception, c.à.d. retrouver le signal originel S à partir du signal modulé M.

(3) Information

Un certain volume de données informatiques est transmis de façon optimale en 3 minutes à travers un cable dont la bande de fréquences utiles est de 2k Hz à 6k Hz. On remplace ce cable par un autre dont la bande de fréquences utiles est de 5k Hz à 17k Hz. Combien de temps devrait théoriquement requérir la transmission de façon optimale du même volume de données ?

(4) Filtres numériques

On considère des signaux échantillonnés de la forme $x(t)$ pour t entier relatif.

(i) Expliquer pourquoi la réalisation concrète d'un filtre numérique à réponse impulsionnelle infinie requiert une mise en oeuvre récursive ?

(ii) On a un filtre numérique transformant un signal d'entrée $x(t)$ ($t \in \mathbb{Z}$) en un signal de sortie $y(t)$ donné par

$$y(t) = x(t) + \frac{1}{3}x(t-2) + \frac{1}{9}x(t-4) + \frac{1}{27}x(t-6) + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} x(t-2k).$$

(a) Donner une équation récursive (avec un nombre fini de termes) liant $x(t)$ et $y(t)$.

(b) Dessiner le diagrame d'un circuit réalisant ce filtre avec des additionneurs et multiplicateurs de signaux, et des délais d'une unité de temps.

(5) Calculer ou ne pas calculer...

Soient $f_1, f_2 \in \mathbb{R}$, avec $f_1 > f_2 > 0$. On définit les fonctions S_1 et S_2 par

$$S_1(x) = \frac{\sin[2\pi\, f_1 x]}{\pi\, x} \qquad \text{et} \qquad S_2(x) = \frac{\sin[2\pi\, f_2 x]}{\pi\, x}.$$

(i) Donner la convolution de S_1 par S_2.

(ii) Donner la transformée de Fourier de $S_1(x)^2$.

(6) Analyse de Fourier

Donner la transformée de Fourier de la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} 1 + \cos x & \text{pour } -\pi < x < +\pi; \\ 0 & \text{pour } |x| \geq \pi. \end{cases}$$

(7) Échantillonnage audio

L'oreille n'entend pas les fréquences supérieures à 20k Hz. Un signal sonore contenant des fréquences jusqu'à 30k Hz est échantillonné, avec une fréquence d'échantillonnage de 50k Hz. Quel problème y aura-t-il théoriquement et concrètement ?