FORMULES DE BASE EN ANALYSE DE FOURIER
ET TRAITEMENT DU SIGNAL UNIDIMENSIONNEL

Christian RONSE, LSIIT UMR 7005 CNRS-ULP, Département d'Informatique de l'ULP

Pour $u \in \mathbb{C}$, $\overline{u}$ désigne le complexe conjugué de u. La fonction *cisoide* et la fonction *sinus cardinal* sont définies par

$$\operatorname{cis} x = \cos x + i \sin x \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x} \ .$$

CONVOLUTION, TRANSFORMÉE DE FOURIER ET INVERSE

On considère des fonctions $E \to \mathbb{C}$. On note $f * g$ la convolution de f par g, tandis que la transformée de Fourier de f est notée $\mathcal{F}(f)$. Les formules varient suivant le type d'espace :

— *non échantillonné et non périodique* ($E = \mathbb{R}$) :
$\mathcal{F}(f)$ est non échantillonnée et non périodique.

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)\, ds \qquad (t \in \mathbb{R}) \ ,$$

$$\mathcal{F}(f)(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \exp[-2\pi i\, ut]\, dt \qquad (u \in \mathbb{R}) \ ,$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(u)\, \exp[+2\pi i\, ut]\, du \qquad (t \in \mathbb{R}) \ .$$

— *non échantillonné et périodique de période* T ($E = \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$, l'ensemble des réels modulo T) :
$\mathcal{F}(f)$ est échantillonnée de pas $1/T$ et non périodique.

$$(f * g)(t) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)g(t-s)\, ds \qquad (t \in \mathbb{R}/T\mathbb{Z}) \ ,$$

$$\mathcal{F}(f)(z/T) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)\, \exp[-2\pi i\, zt/T]\, dt \qquad (z \in \mathbb{Z}) \ ,$$

$$f(t) = \sum_{z=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(z/T)\, \exp[+2\pi i\, zt/T] \qquad (t \in \mathbb{R}/T\mathbb{Z}) \ .$$

$\mathcal{F}(f)(z/T)$ correspond au coefficient c_z de la série de Fourier.

— *échantillonné de pas* Δ *et non périodique* ($E = \Delta\mathbb{Z}$, l'ensemble des multiples de Δ) :
$\mathcal{F}(f)$ est non échantillonnée et périodique de période $1/\Delta$.

$$(f * g)(z\Delta) = \sum_{y=-\infty}^{+\infty} f(y\Delta)g(z\Delta - y\Delta) \qquad (z \in \mathbb{Z}) \ ,$$

$$\mathcal{F}(f)(u) = \sum_{z=-\infty}^{+\infty} f(z\Delta)\, \exp[-2\pi i\, uz\Delta] \qquad (u \in \mathbb{R}/\Delta^{-1}\mathbb{Z}) \ ,$$

$$f(z\Delta) = \Delta \int_{0}^{1/\Delta} \mathcal{F}(f)(u)\, \exp[+2\pi i\, uz\Delta]\, du \qquad (z \in \mathbb{Z}) \ .$$

Ce cas correspond au précédent (avec $\Delta = 1/T$) par interversion des domaines temporel et fréquentiel.

— *échantillonné de pas* Δ *et périodique de période* $N\Delta$ ($E = \Delta\mathbb{Z}/N\Delta\mathbb{Z}$, l'ensemble des multiples de Δ modulo $N\Delta$) :

$\mathcal{F}(f)$ est échantillonnée de pas $1/N\Delta$ et périodique de période $1/\Delta$.

$$(f * g)(x\Delta) = \frac{1}{N\Delta} \sum_{y=0}^{N-1} f(y\Delta) g(x\Delta - y\Delta) \qquad (x = 0, \ldots, N-1) \ ,$$

$$\mathcal{F}(f)(v/N\Delta) = \frac{1}{N\Delta} \sum_{x=0}^{N-1} f(x\Delta) \exp[-2\pi i\, vx/N] \qquad (v = 0, \ldots, N-1) \ ,$$

$$f(x\Delta) = \Delta \sum_{v=0}^{N-1} \mathcal{F}(f)(v/N\Delta) \exp[+2\pi i\, vx/N] \quad (x = 0, \ldots, N-1) \ .$$

PHASE ET AMPLITUDE

L'*amplitude* de Fourier $\mathcal{A}(f)$ et la *phase* de Fourier $\Phi(f)$ sont définies comme suit :

$$\mathcal{A}(f)(\mathbf{u}) = |\mathcal{F}(f)(\mathbf{u})| \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}(f)(\mathbf{u}) = \mathcal{A}(f)(\mathbf{u}) \cdot \exp[i\, \Phi(f)(\mathbf{u})]$$

L'amplitude de Fourier est à valeurs réelles non-négatives, tandis que la phase de Fourier est à valeurs réelles modulo 2π (c'est un angle). Pour f *à valeurs réelles*, on a $\mathcal{F}(f)(-u) = \overline{\mathcal{F}(f)(u)}$, et alors :

$$\mathcal{A}(f)(-u) = \mathcal{A}(f)(u) \qquad \text{et} \qquad \Phi(f)(-u) = -\Phi(f)(u) \ .$$

FILTRE PASSE-BAS

Soit θ la fréquence de coupure. On définit la fonction PB_θ par

$$PB_\theta(x) = \frac{\sin 2\pi\theta x}{\pi x} = 2\theta \ \mathrm{sinc}(2\pi\theta x) \ .$$

La transformée de Fourier de PB_θ vérifie

$$\mathcal{F}(PB_\theta)(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } |u| \leq \theta, \\ 0 & \text{si } |u| > \theta. \end{cases}$$

La convolution par PB_θ opère donc un filtre passe-bas idéal à fréquence de coupure θ.

ÉCHANTILLONNAGE ET PÉRIODISATION

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et soit $f_\Delta : \Delta\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ l'*échantillonnage de f de pas* Δ, défini par $f_\Delta(z\Delta) = f(z\Delta)$ pour $z \in \mathbb{Z}$; la fréquence d'échantillonnage est $1/\Delta$. La transformée de Fourier de f_Δ est obtenue à partir de celle de f par *périodisation de période* $1/\Delta$ (et division par Δ) :

$$\mathcal{F}(f_\Delta)(u) = \frac{1}{\Delta} \sum_{z=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(u - z/\Delta) \ .$$

Soit ν la plus petite fréquence > 0 telle que $\mathcal{F}(f)$ s'annule en dehors de l'intervalle $[-\nu, +\nu]$. Il y a repli de spectre (donc perte d'informations) pour $1/\Delta < 2\nu$, tandis que pour $1/\Delta \geq 2\nu$ on a

$$\mathcal{F}(f_\Delta)(u) = \frac{1}{\Delta}\mathcal{F}(f)(u) \qquad \text{pour} \quad u \in [-\nu, +\nu] \ ,$$

et ainsi f peut être obtenu à partir de f_Δ par filtre passe-bas à fréquence de coupure $1/2\Delta$ (et multiplication par Δ). C'est le *théorème de Shannon* (dû aussi à Kotelnikov, Nyquist, ...). La fréquence 2ν est la plus petite fréquence d'échantillonnage telle qu'il n'y ait pas de perte d'informations à l'échantillonnage ; on l'appelle *fréquence de Nyquist*. Le filtre passe-bas à fréquence de coupure $1/2\Delta$ vérifie

$$\Delta \cdot PB_{1/2\Delta}(x) = \mathrm{sinc}(\pi x/\Delta) \ ,$$

et son application à f_Δ donne la *formule d'interpolation de Whittaker* :

$$f(t) = \sum_{z=-\infty}^{+\infty} f_\Delta(z\Delta)\, \mathrm{sinc}\Big[\frac{\pi(t - z\Delta)}{\Delta}\Big] \ .$$