Cours de Traitement de Signal

Jean-Marie Clément

11 mai 1998

Table des matières

0.1 Introduction

0.1.1 Qu'est ce que le traitement du signal ?

Théorie et traitement du signal

Avant de parler de traitement de signal, il faut entendre *théorie du signal*. La description mathématique des signaux est l'objectif fondamental de la théorie du signal. Il s'agit d'établir une correspondance entre des signaux physiques et des objets mathématiques classiques.
La théorie du signal et son traitement sont intimement liés :

la théorie du signal modélise et décrit les signaux

le traitement du signal interprète et élabore d'autres signaux à l'aide des ressources de l'électronique, de l'informatique et de la physique appliquée.

Une part importante de la théorie du signal est de nature mathématique. Elle se différencie cependant de cette discipline par la nature des questions auquelles elle cherche à répondre.
Certaines notions mathématiques comme la continuité ou la dérivabilité ne se transposent pas simplement au domaine physique.
Le modèle mathématique d'un signal est une fonction qui est elle-même abusivement appelée signal. Elle est en effet la seule information à laquelle nous ayons accès ; le modèle et la fonction sont donc, du point de vue de notre système, confondus.

Description d'un système de base

Un système est un dispositif comportant une entrée et une sortie ; soumis à une excitation à son entrée (*signal d'entree*), il produit une réponse (*signal de sortie*) ;
Un système peut être assimilé à un opérateur H qui fait correspondre à tout signal d'entrée *e(t)* un signal de sortie :$s(t) = H[e(t)]$

Fig. 1: Description d'un système

Qu'est ce qu'un signal ?

Un signal est la manifestation, sous la forme d'une grandeur observable, d'un phénomène physique.

- les phénomènes physique qui nous intérèssent ont une manifestation observable : rayonnement electromagnétique, onde sonore, odeur, ...
- Par exemple, en astronomie, un phénomène est la combustion du gaz dans les étoiles. Le signal que nous en percevons est le rayonnement électromagnétique qui nous arrive.
- Un phénomène peut se manifester sous la forme de plusieurs types de signaux : le déplacement d'une voiture se manifeste par un signal sonore et un signal visuel et une odeur ;

0.1.2 les signaux

Un signal peut être décrit de deux manières distinctes :

- soit en tant qu'expression temporelle de l'évolution d'une grandeur physique mesurable (représentation temporelle)
- soit en tant qu'expression de la composition fréquentielle de cette même grandeur (représentation spectrale)

L'idée *fondamentale* en traitement du signal : tout signal est bi-univoquement déterminé par sa composition spectrale, celle ci pouvant être obtenue par la *Transformée de* FOURIER de l'être mathématique choisi pour la représenter.

Par exemple, un signal sinusoïdal pur est représenté dans le temps par une fonction sinus, et dans le domaine fréquentiel par une impulsion à la fréquence du sinus.

Classification des signaux

Les signaux sont de nature très diverses, et il peuvent être classés selon différents critères.

Signaux continus et discrets

Les signaux que nous pouvons observer à l'état naturel sont à temps continu (dits *signaux continus* par abus de langage). Toutefois, les méthodes du traitement numérique du signal impliquent une extension de la notion de signal, en introduisant la notion de *signal numérique* ou *signal à temps discret*, ou par dérive, *signal discret*. Un signal numérique se présente comme une séquence de valeurs numériques réelles ou complexes.

L'opération qui permet d'obtenir un signal à temps et amplitude discrets à partir d'un signal analogique continu s'appelle *numérisation du signal analogique*. La numérisation des signaux analogiques à des fins de traitement s'impose dans la majeure partie des cas : le traitement numérique présente un certain nombre d'avantages par rapport au traitement analogique :

- stabilité à long terme (pas de vieillissement) et à court terme (insensibilité aux conditions opératoires) ;
- reproductibilité et constance ;
- bien meilleure précision ; la précision est liée au nombre de bits utilisés ;
- souplesse de la gestion logicielle ;
- permet des enregistrements numériques qui présentent les mêmes avantages ;
- autorise des traitements complexes ;
- bien meilleur rapport signal sur bruit ;
- fiabilité plus élevée ;

Cependant, les vitesses de traitement restent limitées, et les hyperfréquences restent inaccessibles.

Signaux déterministes et aléatoires

Un signal déterministe est un signal dont l'évolution au cours du temps peut parfaitement être prédite par un modèle mathématique approprié.

Un signal aléatoire est quant à lui porteur d'information. C'est le cas de la plupart de signaux physique.

Un signal pseudo-aléatoire peut être considéré comme de l'une ou l'autre classe en fonction de l'échelle à laquelle il est observé.

Domaines d'application

cette liste est non exhaustive

- les télécommunications
- les systèmes de mesure
- systèmes radars et sonars
- l'analyse biomédicale
- la commande industrielle
- ...

0.1.3 Plan du cours

La première partie du cours portera sur l'étude d'un outil mathématique fondamental en traitement du signal et ses applications au signal analogique : *la transformée de* FOURIER. Nous verrons ses propriétés, ainsi que les *distributions*.
Nous étudierons ensuite l'échantillonage et la quantification d'un signal, conjointement avec leurs contraintes et conséquences.
L'échantillonage et la quantification conduisant à des signaux discrets, nous avons besoins d'outils adaptés. C'est la *transformation en Z* que nous utiliserons, et dont l'apprentissage s'imposera alors.

Nous serons alors en possession d'un certain nombre d'outils, et pourrons enfin aborder des phases actives du traitement de signal : le *filtrage numérique*.

Chapitre 1

Signaux continus

1.1 L'analyse de FOURIER

1.1.1 Introduction

Le traitement du signal s'attache donc à l'étude de phénomènes physiques ; nous n'avons cependant que rarement un modèle mathématique correspondant exactement à une manifestation physique. L'idée d'exprimer une fonction de forme complexe comme une combinaison linéaire de fonctions élémentaires de forme simple est bien connue. Par exemple, dans un intervalle $[u_1, u_2]$, une fonction $\theta(u)$ peut être représentée par

$$\theta(u) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \psi_i(u)$$

où les fonctions $\psi_i(u)$ forment un ensemble de fonctions élémentaires de forme simple. Si ces fonctions sont orthogonales, alors les coefficients α_i sont indépendants les uns des autres. On parle dans ce cas du *développement en série de fonctions orthogonales.* Ce développement conduit à une représentation vectorielle des signaux : les coefficients α_i constituent une représentation discrète du signal $\theta(u)$. Ceci constitue le fondement de l'analyse des signaux. Le choix des fonctions $\psi(t)$ dépend de l'ensemble des signaux considéré, et du traitement opéré sur les signaux. L'intérêt majeur de cette décomposition linéaire d'un signal à l' aide de signaux plus simples est de faciliter l'analyse de la réponse des systèmes linéaires à des signaux d'entrée très généraux.

1.1.2 Séries de FOURIER

À cause de l'importance du filtrage linéaire, *l'analyse harmonique* est l'instrument majeur de la théorie du signal, et la transformée de FOURIER, généralisée par l'emploi des distributions, permet d'obtenir une représentation spectrale d'un grand nombre de signaux. Il est intéressant de placer le développement en série de FOURIER d'une fonction périodique dans le cadre de l'approximation d'une fonction par d'autres.
Nous allons tout d'abord rechercher l'approximation idéale d'une fonction par une autre.

approximation d'une fonction par une autre

Supposons d'abord que l'on ait deux fonctions continues sur $[t_1, t_2]$ au sens de la minimisation de l'erreur quadratique moyenne par exemple :

$$\varepsilon = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [x(t) - Cf(t)]^2 \, dt \qquad (1.1)$$

$$
\begin{aligned}
& & = & \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) - 2Cf(t)x(t) + C^2 f^2(t)\ dt \\
\textit{or} & \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial C} & = & \frac{2}{t_2 - t_1} C \int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\ dt - \int_{t_1}^{t_2} x(t) f(t)\ dt \\
\textit{et} & \quad \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial C^2} & = & \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\ dt \qquad \text{qui est} \geq 0
\end{aligned}
$$

Donc C est minimum pour $\frac{\partial \varepsilon}{\partial C} = 0$, soit pour

$$
C = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) f(t)\ dt}{\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\ dt}
$$

approximation d'une fonction par une base de fonctions

Si maintenant on veut approcher $x(t)$ par $\sum_{i=1}^{n} C_i f_i(t)$ sur $[t_1, t_2]$ avec $f_i(t)$ famille de fonctions orthogonales de $L^2(I)$ c'est-à-dire telle que

$$
\begin{aligned}
< f_i, f_j > & = 0 \qquad \forall i \neq j \\
\varepsilon & = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left(x(t) - \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(t) \right)^2 dt
\end{aligned}
$$

Reprenons 1.1. Compte tenu de l'orthogonalité des fonction f_i :

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial \varepsilon}{\partial C_i} = \frac{2}{t_2 - t_1} [- \int_{t_1}^{t_2} x(t) f_i(t)\ dt + C_i \int_{t_1}^{t_2} f_i^2(t)\ dt] \\
\text{et} \quad & \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial C_i^2} = \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_i^2(t)\ dt \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial \varepsilon}{\partial C_i} = 0 \Rightarrow i = \begin{cases} C_i = \frac{<x, f_i>}{||f_i||^2} & i = 1, \ldots, n \\ x(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{<x, f_i>}{||f_i||^2} f_i(t) & t \in [t_1, t_2] \end{cases} \tag{1.2}
$$

Cas des fonctions périodiques

Supposons maintenant que la fonction à approximer ait une période T : $x_T(t)$. Supposons aussi que l'ensemble des fonctions $f_i(t)$ orthogonales soit complet et constitué de $\cos i\frac{2\pi}{T}t$ et $\sin i\frac{2\pi}{T}t$, $i = 0, 1, \ldots$.

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2 \frac{2\pi kt}{T}\, dt &= \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1+\cos\frac{4\pi kt}{T}}{2}\, dt \\
&= \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2}\, dt + \frac{1}{2}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\frac{4\pi kt}{T}\, dt \\
\|f_k\|^2 &= \begin{cases} \frac{T}{2} & \text{pour } i \neq 0 \\ T & \text{si } i = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

d'après (1.2) :

$$x_T(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\frac{2\pi}{T}t) + b_n \sin(n\frac{2\pi}{T}t))$$

avec

$$\left|\begin{aligned}
a_n &= \tfrac{2}{T}\textstyle\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_T(t)\cos(n\frac{2\pi}{T}t)\, dt \\
b_n &= \tfrac{2}{T}\textstyle\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_T(t)\sin(n\frac{2\pi}{T}t)\, dt \\
a_0 &= \tfrac{1}{T}\textstyle\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_T(t)\, dt \\
b_0 &= 0
\end{aligned}\right.$$

En remplaçant les expressions de sin et cos par les formules d'Euler, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
x_T(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{\frac{2j\pi nt}{T}} + e^{\frac{-2j\pi nt}{T}}}{2} + b_n \frac{e^{\frac{2j\pi nt}{T}} - e^{\frac{-2j\pi nt}{T}}}{2j} \\
&= a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_n - jb_n}{2} e^{\frac{2j\pi nt}{T}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_n + jb_n}{2} e^{\frac{-2j\pi nt}{T}} \\
&= a_0 e^{\frac{ej\pi 0t}{T}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_n - jb_n}{2} e^{\frac{2j\pi nt}{T}} + \sum_{i=-1}^{-\infty} \frac{a_{-n} + jb_{-n}}{2} e^{\frac{2j\pi nt}{T}} \\
\text{or } a_{-n} &= a_n \\
\text{et } b_{-n} &= -b_n \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{a_n - jb_n}{2} e^{\frac{2j\pi nt}{T}} \\
\text{soit, en posant } c_n &= a_n - jb_n
\end{aligned}$$

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t} \tag{1.3}$$

avec

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t}\, dt$$

Ces formule nous donnent une représentation de toute fonction périodique, localement à variations bornées et latéralement continue. Cette représentation, qui se résume à l'ensemble c_n, peut être interprétée comme constituant le spectre (de raies) du signal périodique $x_T(t)$. Bien entendu, les représentations pour $n < 0$ n'ont aucune signification physique.
Nous avons donc :

- un spectre d'amplitude : $|c_k|$, aussi égal à $\frac{1}{2}\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$
- un spectre de phase : $\Phi(c_k)$, aussi égal à $-\arctan(\frac{b_n}{a_n})$

Exemple de développement en série de FOURIER
Soit $x(t) = \sin(\omega_0 t)$. La période est donc $\frac{2\pi}{\omega_0}$

$$
\begin{aligned}
x(t) &\overset{T.F.}{\longrightarrow} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(\omega_0 t) e^{-\frac{2j\pi n t}{T}}\,dt \\
&= \frac{\omega_0}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} e^{-jn\omega_0 t}\,dt \\
&= \frac{\omega_0}{4j\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} e^{j(1-n)\omega_0 t} - e^{-j(n+1)\omega_0 t}\,dt \\
&= \frac{\omega_0}{4j\pi}\left(\frac{1}{j(1-n)\omega_0}\left(e^{j(1-n)\pi} - e^{-j(1-n)\pi}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{j(n+1)\omega_0}\left(e^{-j(n+1)\pi} - e^{j(n+1)\pi}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2j}\left(\operatorname{sinc}((1-n)\pi) - \operatorname{sinc}((1+n)\pi)\right) \\
&= \frac{1}{-4\pi}\left(\frac{1}{1-n}2j\sin((1-n)\pi)\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{1+n}2j\sin((1+n)\pi)\right) \\
&= \frac{j}{2}\left(\operatorname{sinc}((1+n)\pi) - \operatorname{sinc}((1-n)\pi)\right) \\
&= \begin{cases} -\frac{j}{2} & \text{si } n = 1 \\ \frac{j}{2} & \text{si } n = -1 \end{cases} \\
|X_k| &= \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n = 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } n = -1 \end{cases} \\
\phi(X_k) &= \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{si } n = 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = -1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Théorème de Parseval

Calculons la puissance moyenne du signal :

$$\overline{x_T^2(t)} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_T^2(t)\,dt \qquad \text{(valeur quadratique moyenne de } x_T(t).)$$

Soit, en utilisant (1.3)

$$\overline{x_T^2(t)} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_k c_l e^{j\frac{2\pi}{T}k+lt}\,dt$$

La convergence uniforme de séries de Fourier autorise à permuter les signes $\sum$ et $\int$.

$$\begin{aligned}
\overline{x_T^2(t)} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{j\frac{2\pi}{T}(k+l)t}\,dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l \frac{1}{T}\frac{T}{2j\pi(k+l)}\left(e^{j\pi(k+l)} - e^{-j\pi(k+l)}\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l \operatorname{sinc}(\pi(k+l))
\end{aligned}$$

Toutes les intégrales s'annulent sauf pour $k = -l$. L'équation précédente peut donc s'écrire :

$$\overline{x_T^2(t)} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i c_{-i}$$

Or d'après les formules de c_n pour n positif ou négatif,

$$c_{-i} = c_i^* \Rightarrow c_i c_{-i} = |c_i|^2$$

d'où

$$\overline{x_T^2(t)} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |c_i|^2 \qquad \text{relation de Parseval} \tag{1.4}$$

Cette relation exprime que la puissance moyenne de $x_T(t)$ (ou sa valeur quadratique moyenne) est fournie par la somme des carrés de l'amplitude de toutes les harmoniques du spectre. Cette relation vient conforter l'idée de dualité entre l'expression dans les domaines temporels et fréquentiels.
Nous avons vu, en passant par le cas de l'approximation de fonctions complexes par d'autres plus simples, le développement d'une fonction périodique (localement à variations bornées et latéralement continue) en série de Fourier. Au delà de la représentation mathématique, le développement en série de Fourier donne accès àu spectre fréquentiel de cette fonction.

1.1.3 Transformée de Fourier

Nous allons maintenant nous intéresser à une représentation équivalente pour les fonctions non périodiques.

Cas des signaux représentés par des fonctions non périodiques du temps

Les signaux périodiques peuvent donc être représentés par un ensemble de sinus et cosinus. Comme les signaux à représenter sont périodiques, ces sinusoïdes doivent prendre périodiquement la même valeur simultanément, et sont donc de fréquences multiples d'une fréquence appelée *fondamental*.
Pour le passage à des signaux non périodiques, nous pouvons intuitivement introduire la notion de fréquences continues.

Définition de la transformée de Fourier

Les transformées de Fourier directes et inverses sont :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2i\pi ft}\,dt \tag{1.5}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{2i\pi ft}\,df \tag{1.6}$$

Propriétés

linéarité :

$$\text{Soient } x_1(t) \xrightarrow{T.F.} X_1(f) \quad \text{et} \quad x_2(t) \xrightarrow{T.F.} X_2(f)$$

$$\Rightarrow a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \xrightarrow{T.F.} a_1X_1(f) + a_2X_2(f) \qquad \forall (a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2$$

Translation en temps et en fréquence : Soit $t_0 \in \mathbb{R}$.

$$x(t+t_0) \xrightarrow{T.F.} \int_{-\infty}^{\infty} x(t+t_0)\; e^{-2j\pi ft}\,dt$$

$$\text{posons } t = t - t_0$$

$$\xrightarrow{T.F.} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\; e^{-2j\pi ft}\; e^{2j\pi ft_0}\,dt$$

$$\xrightarrow{T.F.} e^{2j\pi ft_0}\; X(f)$$

Soit :

$$x(t+t_o) \xrightarrow{T.F.} X(f)e^{2j\pi ft_0} \qquad \forall t_0 \in \mathbb{R}$$

$$x(t)e^{2i\pi f_0 t} \xrightarrow{T.F.} X(f-f_0) \qquad \forall f_0 \in \mathbb{R}$$

Cette propriété est à la base des problèmes de modulation de signaux : la multiplication par une exponentielle complexe entraîne un décalage en fréquence du signal.

Dilatation : Soit a un réel positif.

$$\begin{aligned}
x(at) &\xrightarrow{T.F.} \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-2j\pi ft}\, dt \\
&\xrightarrow{T.F.} \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2j\pi t\frac{f}{a}}\, dt \\
&\xrightarrow{T.F.} \frac{1}{a}X(\frac{f}{a}) \\
x(-at) &\xrightarrow{T.F.} \int_{-\infty}^{\infty} x(-at)e^{-2j\pi ft}\, dt \\
&\xrightarrow{T.F.} \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{-2j\pi t\frac{f}{a}}\, dt \\
&\xrightarrow{T.F.} \frac{1}{a}\int_{--\infty}^{-\infty} x(t)e^{2j\pi t\frac{f}{a}}\, (-1)dt \\
&\xrightarrow{T.F.} \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{2j\pi t\frac{f}{a}}\, dt \\
&\xrightarrow{T.F.} \frac{1}{a}X(-\frac{f}{a})
\end{aligned}$$

Soit

$$x(at) \xrightarrow{T.F.} \frac{1}{|a|}X(\frac{f}{a}) \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

Donc un étalement de l'échelle des temps conduit à une contraction de l'échelle des fréquences et inversement.
Un enregistrement sonore lu à une vitesse différente de celle de la prise de son donnera l'impression d'une variation de tonalité.

Dérivations :

$$\begin{aligned}
\frac{d[x(t)]}{dt} &\xrightarrow{T.F.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d[x(t)]}{dt}e^{-2j\pi ft}\, dt \\
&\xrightarrow{T.F.} \underbrace{\left[x(t)e^{-2j\pi ft}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0 \text{ en } \pm\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} 2j\pi f x(t)e^{-2j\pi ft}\, dt \\
&\xrightarrow{T.F.} 2j\pi f\ X(f)
\end{aligned}$$

En extrapolant aux dérivées nièmes :

$$\begin{aligned}
\frac{d^n[x(t)]}{dt^n} &\xrightarrow{T.F.} (2j\pi f)^n X(f) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \\
(-2j\pi t)^n x(t) &\xrightarrow{T.F.} \frac{d^n[X(f)]}{df^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Produit de convolution :

$$\begin{aligned}
\text{Si} \qquad z(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)\,d\tau = x(t)*y(t) \\
Z(f) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)\ d\tau\ e^{-2j\pi ft}\ dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)e^{-2j\pi f\tau}e^{-2j\pi f(t-\tau)}\ d\tau\ dt \\
\text{Posons} \qquad & \begin{cases} \tau &= \quad \tau \\ u &= \ t-\tau \end{cases} \\
Z(f) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(u)e^{-2j\pi f\tau}e^{-2j\pi fu}\ d\tau\ du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-2j\pi f\tau}\ d\tau\ \int_{-\infty}^{\infty} y(u)e^{-2j\pi fu}\ du \\
&= X(f)Y(f)
\end{aligned}$$

Nous avons donc (théorème de Plancherel) :

$$\begin{aligned}
x(t)*y(t) &\xrightarrow{T.F.} X(f).Y(f) \\
x(t).y(t) &\xrightarrow{T.F.} X(f)*Y(f)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Cette propriété du produit de convolution est fondamentale parce que nous verrons que le filtrage linéaire invariant dans le temps et continu produit en sortie un signal qui est le produit de convolution du signal d'entrée par un signal caractéristique du filtre.

Théorème de Parseval – Étude énergétique

Soient deux signaux d'énergie finie : $x(t)$ et $y(t)$.
En appliquant le théorème de Plancherel, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
x(t)*y^*(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(\tau-t)\ d\tau \\
&\xrightarrow{T.F.} X(f)Y^*(f) \\
\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(\tau-t)\ d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)e^{2j\pi ft}\ df
\end{aligned}$$

En $t=0$ et pour $y(t)=x(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x^*(\tau)\ d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)X^*(f)\ df$$

Soit :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\ df \tag{1.8}$$

La fonction d'intercorrélation de deux signaux à énergie finie $x(t)$ et $y(t)$ est definie par :

$$R_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y^*(\tau - t)\, d\tau$$

et la fonction d'autocorrélation par :

$$R_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x^*(\tau - t)\, d\tau$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} R_x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x^*(-(t-\tau))\, d\tau \\ &= x(t) * x^*(-t) \\ &\xrightarrow{T.F.} X(f)X^*(f) \\ &\xrightarrow{T.F.} |X(f)|^2 \end{aligned}$$

La transformée de FOURIER de la fonction d'autocorrélation d'un signal à énergie fine est appelée *spectre d'énergie* ou *densité spectrale d'énergie.*

$$E_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\, df$$

L'énergie du signal s'obtient par inégration de sa densité spectrale d'énergie sur toutes les fréquences.

Propriétés locales et asymptotiques

Il est intéressant de remarquer que les propriétés de décroissance asymptotique du spectre complexe sont reliées aux propriétés de régularité locale (continuité, dérivabilité ou variations bornées) d'un signal.
Si un signal $x(t)$ est continu, si toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ existent sur $\mathbb{R}$ et si sa dérivée à l'ordre n existe, sauf en un nombre fini de points, alors $X(f)$ existe et $X(f)$ tend vers 0 au moins aussi vite que $\frac{1}{f^{n+1}}$ quand $|f| \to \infty$. La réciproque est vraie. Donc par exemple :

$$\begin{aligned} \sqcap_T(t) \xrightarrow{T.F.} T\,\mathrm{sinc}(\pi f T) &= O(\frac{1}{f}) \\ &\quad \text{car } x(t) \text{ est discontinu en } t = \pm\frac{T}{2} \\ \mathrm{tri}_T(t) \xrightarrow{T.F.} T\,(\,\mathrm{sinc}(\pi f T))^2 &= O(\frac{1}{f^2}) \\ &\quad \text{car } x(t) \text{ est continu et } \tfrac{dx(t)}{dt} \text{ n'existe pas en } t = \pm\frac{T}{2} \end{aligned}$$

Exemple de la fonction porte

Considérons la fonction porte :

$$
\begin{aligned}
\sqcap_T(t) &= \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-2j\pi f t}\, dt \\
&= \left[\frac{e^{-2j\pi f t}}{-2j\pi f} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{-2j\sin(\pi f T)}{-2j\pi f} \\
&= T\,\mathrm{sinc}(\pi f T)
\end{aligned}
$$

1.1.4 Les distributions

Insuffisances de la Transformée de Fourier

Nous pouvons donc accéder, grâce à la transformée de Fourier, à une représentation fréquentielle d'un signal sommable sur $\mathbb{R}$. La transformée de Fourier ne permet cependant pas de traiter un certain nombre de fonctions :

– les fonctions sinusoïdales (donc les fonctions périodiques)

– les échelons

Dans l'exemple ci-dessus, nous ne nous sommes par exemple pas apesantis sur les discontinuités en $\pm\frac{T}{2}$. Cependant, elles ont, intuitivement au moins, une représentation fréquentielle. Le modèle théorique de la transformée de Fourier ne semble donc pas pleinement adapté aux cas réel.

Définition de quelques distributions

Les distributions sont une généralisation de la notion de fonctions, qui en deviennent alors des cas particuliers. Nous n'étudierons ici que les distributions qui nous intéressent pour leur application au traitement de signal.

la distribution de Dirac , notée $\delta_a(t)$ ou $\delta(t-a)$. Cette distribution est la plus importante. Elle donne un modèle mathématique à une discontinuité en un point. Cette distribution possède une énergie infinie concentrée en un point, et sa puissance moyenne est 1 :

$$
\begin{cases} \delta(t) = 0 & \text{pour } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1 & \end{cases}
$$

Elle se représente par un segment vertical de taille 1 au point où elle ne s'annule pas. Ses propriétés sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
x(t)\delta(t-t_0) &= x(t_0)\delta(t-t_0) \\
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)x(t)\ dt &= x(t_0) \\
\delta(at) &= \frac{1}{|a|}\delta(t) \\
\delta^2(t) & \quad \text{n'est pas défini} \\
\delta^{(n)}(t) &= \delta(t) \\
x(t) * \delta(t-t_0) &= x(t-t_0) \\
\delta(t) &\xrightarrow{T.F.} 1 \\
1 &\xrightarrow{T.F.} \delta(t)
\end{aligned}$$

la fonction échelon unité, ou fonction de Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t > 0 \\ a & \text{pour } t = 0 \end{cases}$$

$$u'(t) = \delta(t)$$

la fonction porte

$$\sqcap_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{pour } t < -\frac{T}{2} out > \frac{T}{2} \\ a & \text{pour } t = \pm\frac{T}{2} \end{cases}$$

$$\sqcap'_T(t) = \delta(t + \frac{T}{2}) - \delta(t - \frac{T}{2})$$

1.1.5 Spectres d'énergie et de puissance

Toute transmission d'information est liée à une transmission d'énergie. Lorsqu'on fait une mesure, le processus objet de la mesure subit toujours un prélèvement d'énergie de la part du dispositif de mesure.
Puissance instantanée : $xx^* = p(t)$
Puissance moyenne : $p(t_0, T) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)x^*(t)\ dt$
Energie en δt : $\int_{t_0}^{t_0+\delta t} p(t)\ dt$
Energie totale : $= \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\ dt$

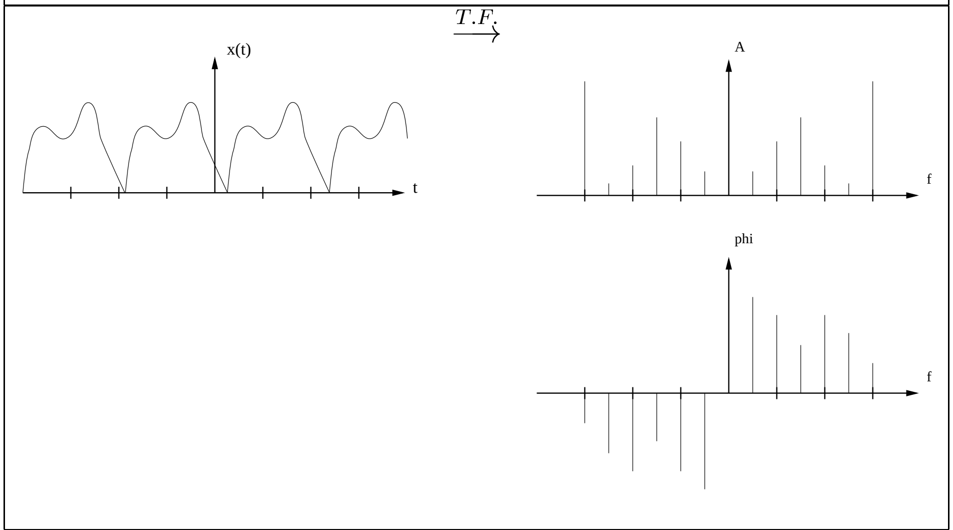
1.1.6 Récapitulation

Nous venons de voir l'analyse de FOURIER. Calculer le développement en série de FOURIER d'une fonction, ou sa transformée de FOURIER, permet de répondre à la question “De quelles sinsoïdes ais-je besoin pour fabriquer un signal donné ?”. Une sinusoïde représentant une fréquence pure, nous obtenons ainsi la décomposition fréquentielle d'un signal. Attention, une sinusoïde n'est pas seulement une fonction sin ; elle peut être tout signal du type $A\sin(\omega+\phi)$, donc aussi une fonction cos.

Séries de FOURIER

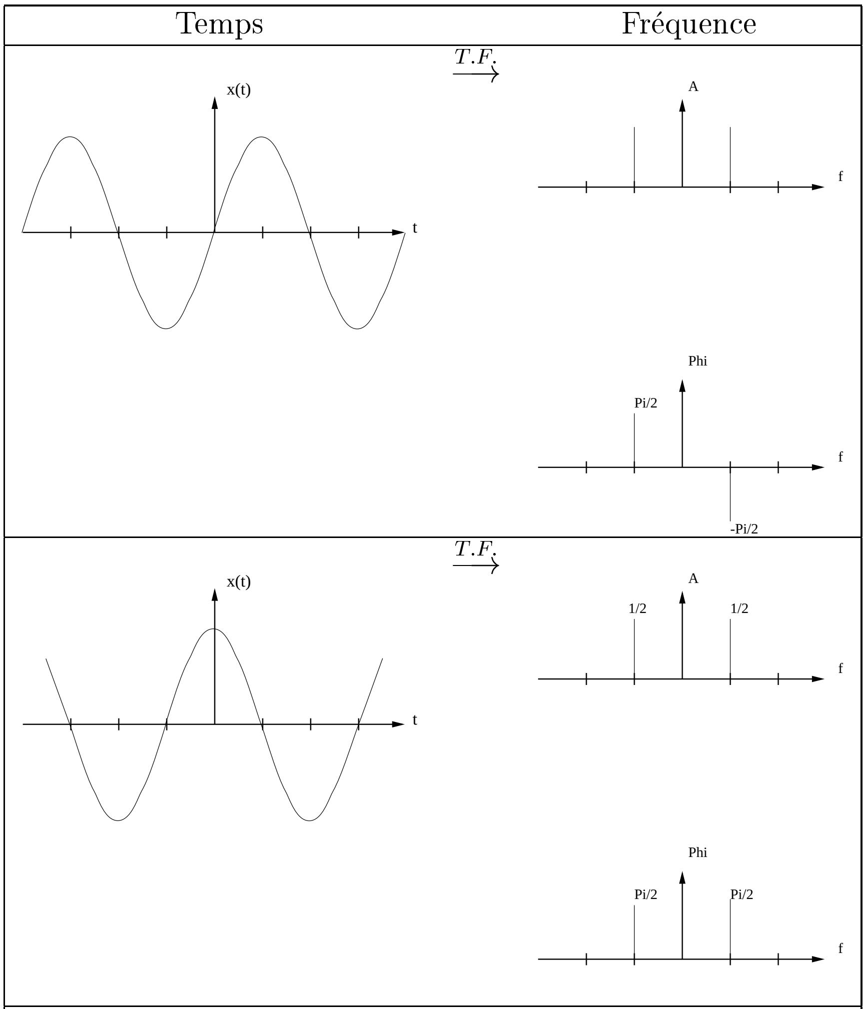
Les séries de FOURIER permettent de connaître la composition fréquentielle d'un *signal périodique*. Le développement en série de FOURIER d'une fonction se fait au moyen des fonctions (1.3). Il fournit une suite de nombres, représentant chacun les caractéristiques d'amplitude et de phase correspondant à une fréquence déterminée.

Temps	Fréquence



Développement en série de FOURIER d'une fonction périodique

Nous voyons dans le tableau précedent les représentations temporelles et fréquentielles d'une fonction périodique quelconque. **Un développement en série de FOURIER a comme résultat un spectre d'amplitude *et* un spectre de phase.**



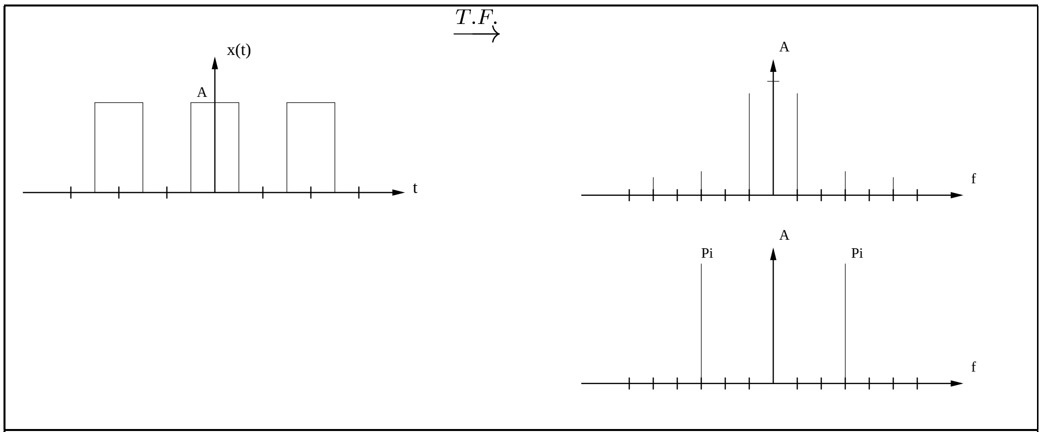
Développement en série de FOURIER des fonctions sin et cos

La figure précedente illustre deux points :

– nous restons logiques : nous avons bien besoin d'une seule fréquence pour représenter des fonctions sinusoïdales pures

– nous voyons l'importance de la phase : les spectres d'amplitude sont identiques, la différenciation des deux signaux se fait uniquement par le spectre de phase.

La position $k = 1$ est relative. Elle correspond à la fréquence principale du signal observé, soit l'inverse de sa période. Donc X_1 est la caractéristique de la fréquence $f = \frac{1}{T}$, aussi appelée *fréquence fondamentale*. Les fréquences correspondant à $k > 1$ sont appelées *harmoniques*, et correspondent de la même manière aux fréquences $\frac{k}{T}$. La fréquence désignée en $k = 0$ est bien la fréquence nulle : c'est la composante continue du signal. Donc tout signal à valeur moyenne nulle doit avoir $X_0 = 0$.

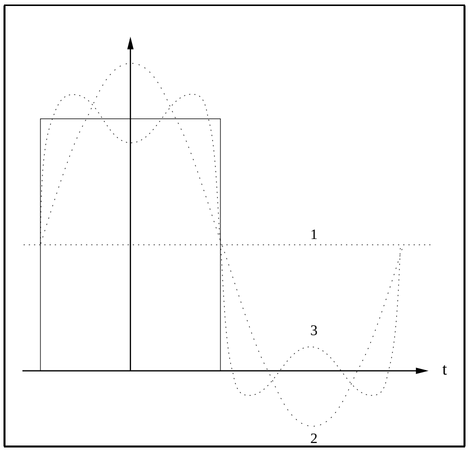


Développement en série de FOURIER d'un signal rectangulaire périodique

Le développement en série de FOURIER du signal rectangulaire est donc $\frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}(\frac{\pi k}{2})$. Cela signifie que pour reconstituer un signal carré T-périodique, nous devons prendre chaque sinusoïde à la fréquence k d'amplitude complexe de $\frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}(\frac{\pi k}{2})$.
Étudions la recomposition du signal carré à partir des fréquences trouvées (voir tableau ci-dessous). Ce qui nous donne :

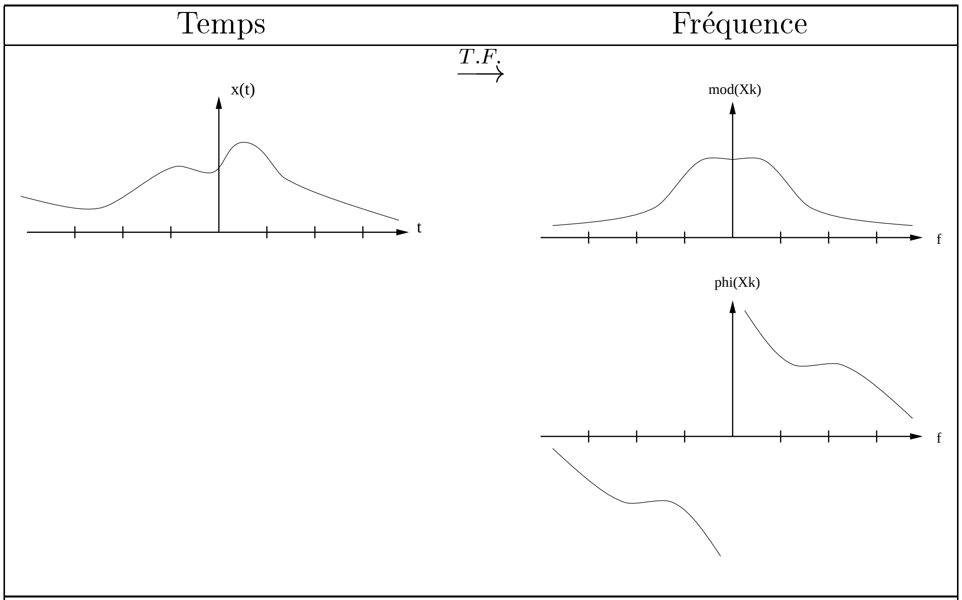
k	X_k	$\lvert X_k\rvert$	$\angle X_k$	Courbe	Remarque
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	Composante continue
1	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{\pi}$	0	2	Fréquence fondamentale
2	0				1ère harmonique
3	$-\frac{1}{3\pi}$	$\frac{1}{3\pi}$	π	3	2ème harmonique
$\vdots$					
∞				4	

Valeurs des coefficients X_k pour un signal carré T-périodique



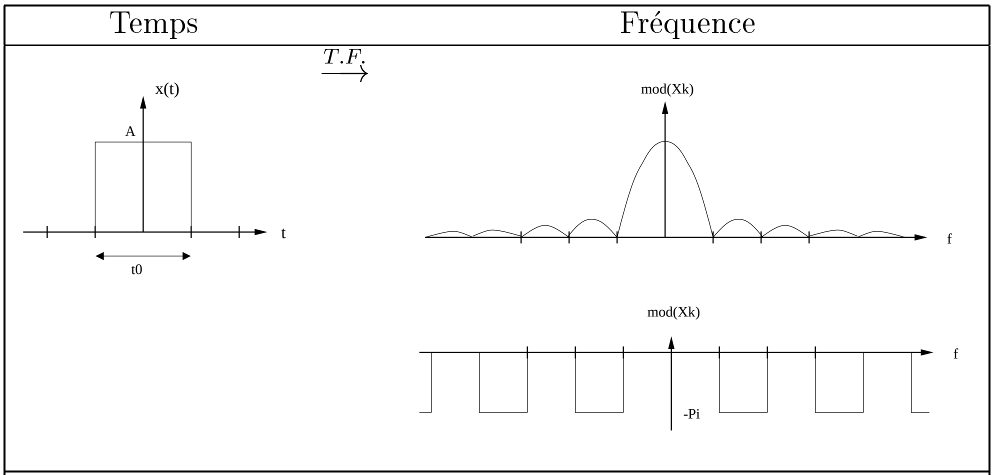
Transformée de FOURIER

La transformée de FOURIER s'applique aux signaux non périodiques. Le calcul se fait au moyen des fonctions (1.5).



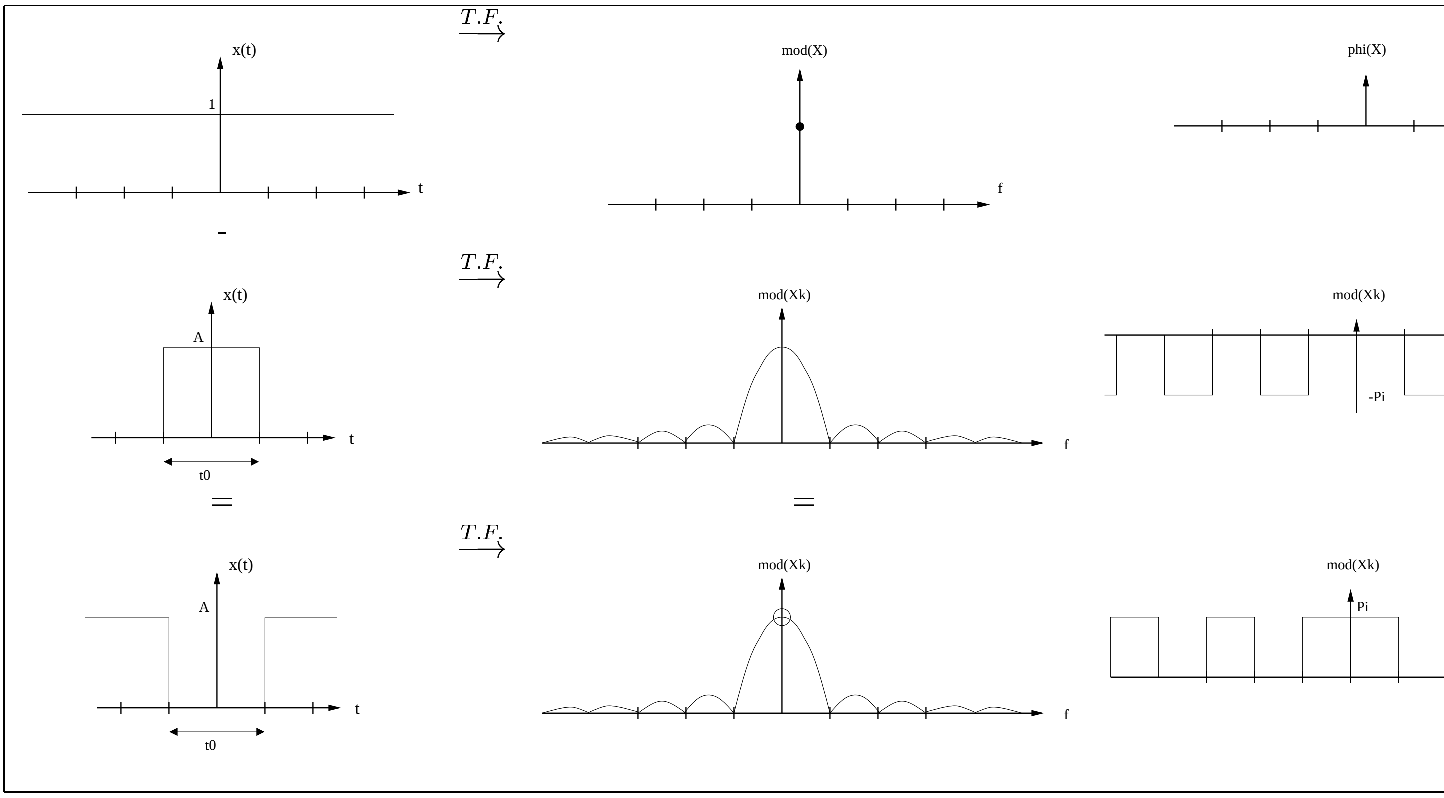
Transformée de FOURIER d'une fonction quelconque

Alors que la décomposition d'une fonction périodique en fréquences élémentaires donnait un ensemble de raies distinctes (chaque raie correspondant à une fréquence, multiple de la fréquence fondamentale, elle-même égale à l'inverse de la période), celle d'un signal non périodique donne un spectre continu.



Développement en série de FOURIER d'un signal carré non périodique

Nous pouvons illustrer la propriété de **linéarité** sur un exemple. Admettons que nous cherchions à connaître la composition fréquentielle d'un signal valant 1 partout, sauf pour $|t| < \frac{t_0}{2}$.



Convolution par un Dirac

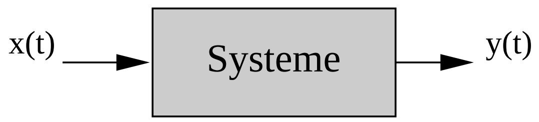
1.2 Étude des systèmes linéaires

1.2.1 Introduction

Nous avons vu jusqu'à maintenant la représentation d'un signal à la fois comme fonction du temps et comme fonction de la fréquence. L'outil mathématique qui permet l'association de l'un à l'autre est l'*analyse de Fourier*.
Nous allons maintenant nous intéresser aux systèmes de traitement de ces signaux à temps continu, plus particulièrement à une classe restreinte de ces systèmes : les *systèmes linéaires invariants dans le temps* (LIT).
Nous ne ferons ici qu'une approche succinte de leur résolution, car nous rejoignons ici les domaines de l'électronique et de l'automatique.

1.2.2 Définitions

Un système est un dispositif qui transforme un signal d'entrée $x(t)$ en un signal de sortie $y(t)$. Nous considèrerons le système comme connu si l'on sait calculer sa sortie lorsque l'entrée est connue.



Linéarité : un système continu est linéaire si, étant donnés $x_1(t), x_2(t)$ deux signaux quelconques, $y_1(t), y_2(t)$ les sorties correspondantes et a, b deux réels quelconques, l'entrée $ax_1(t) + bx_2(t)$ produit la sortie $ay_1(t) + by_2(t)$.

Stationnarité ou Invariance : un système continu est stationnaire si, étant donnés $x(t)$ un signal quelconque, $y(t)$ la sortie correspondante et τ un réel quelconque, le signal $x(t-\tau)$ produit le signal $y(t-\tau)$ en sortie.

Stabilité : un système continu est stable si un signal d'entrée $x(t)$ d'amplitude finie ($|x(t)| \leq A \; \forall t$) produit un signal de sortie $y(t)$ d'amplitude finie ($|y(t)| \leq B \; \forall t$)

Causalité : un système continu est causal si le signal de sortie à n'importe quel instant t_0 est indépendant des valeurs du signal d'entrée pour $t > t_0$

1.2.3 Filtres linéaires invariants dans le temps

Réponse impulsionnelle

Un système linéaire continu stationnaire peut entièrement être décrit par sa *réponse impulsionnelle*. Elle est le signal de sortie obtenu lorsque le signal d'entrée est une impulsion de Dirac $\delta(t)$. Notons-la $h(t)$.

Les propriétés de la distribution de Dirac nous permettent d'écrire :

$$
\begin{aligned}
x(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t).\delta(t)\ dt \\
x(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t).\delta(t-u)\ dt
\end{aligned}
$$

Soit aussi

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u).\delta(u-t)\ du = \int_{-\infty}^{\infty} x(u).\delta(t-u)\ du$$

Cette dernière équation montre que le signal $x(t)$ peut être considéré comme étant constitué d'une infinité continue d'impulsions de Dirac.
La propriété de stationnarité nous permet de dire que, sachant que $\delta(t)$ engendre $h(t)$, le signal d'entrée $\delta(t-\tau)$ engendre le signal $h(t-\tau)$ en sortie.
La propriété de linéarité nous permet d'écrire que le signal $x(\tau).\delta(t-\tau)$ engendre le signal $x(\tau).h(t-\tau)$ en sortie, puis que le signal

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau).\delta(t-\tau)\ d\tau = x(t)$$

engendre le signal

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau).h(t-\tau)\ d\tau = y(t)$$

Soit : un système linéaire invariant, dont la réponse impulsionnelle est $h(t)$, engendre pour tout signal $x(t)$ la sortie :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau).h(t-\tau)\ d\tau \tag{1.9}$$

Nous reconnaissons dans la partie droite de l'équation le produit de convolution. L'opération de filtrage d'un signal $x(t)$ par un système stationnaire linéaire ayant pour réponse impulsionnelle $h(t)$ correspond donc au produit de convolution entre l'entrée et la réponse impulsionnelle :

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

D'où dans le domaine fréquentiel :

$$Y(f) = X(f) \times H(f)$$

où $H(f)$ est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle du filtre étudié. $H(f)$ est la *fonction de transfert* du système.

Conséquences

Les propriétés suivantes peuvent être déduites de la réponse impulsionnelle :
Stabilité : un système stable vérifiera :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$$

Causalité : un système causal vérifiera : $h(t) = 0 \qquad \text{si } t < 0$
D'autre par, lors du chaînage de filtres, nous avons, s'ils ne s'influencent pas entre eux :

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) * \ldots$$

. Ce qui nous donne dans le domaine fréquentiel :

$$H(f) = H_1(f) \times H_2(f) \times \ldots$$

.

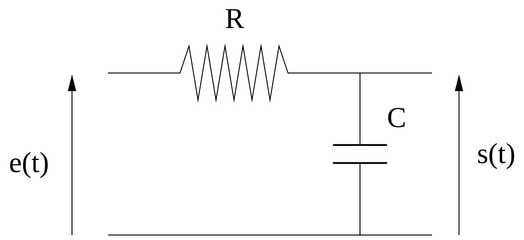
1.2.4 Exemple d'application : le filtre passe-bas

Cas idéal

Le spectre d'un filtre passe-bas idéal est représenté par une fonction porte : $\sqcap_{2F}(f)$. Donc la réponse impulsionnelle du filtre permettant ce filtrage idéal est la transformée de Fourier inverse de la fonction de transfert, soit $2F\,\mathrm{sinc}(2\pi Ft)$.
Or cette fonction n'est pas identiquement nulle pour $t < 0$; donc le filtre n'est pas causal, et n'est pas réalisable.

Filtre passe bas du premier ordre

Un filtre passe-bas du premier ordre est représenté par le schéma électronique suivant :



nous avons alors :

$$\begin{aligned} e(t) &= Ri(t) + s(t) \\ q(t) &= Cs(t) \\ i(t) &= C\frac{ds(t)}{dt} \\ e(t) &= RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t) \end{aligned}$$

La transformée de Fourier de cette dernière relation nous donne :

$$\begin{aligned} E(f) = & \; RC(2j\pi f)S(f) + S(f) \\ \Leftrightarrow \quad \tfrac{S(f)}{E(f)} = & \; \frac{1}{1 + 2j\pi RCf} \end{aligned}$$

d'où

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

1.2.5 Systèmes réalisables

Un système est réalisable si et seulement s'il est causal : l'effet ne peut en effet précéder la cause. Tout système physiquement réalisable aura donc une réponse impulsionnelle $h(t)$ réelle quelconque, et sa fonction de transfert sera complexe, donc de la forme :

$$H(f) = |H(f)|.e^{-j\angle(f)}$$

donc la réponse du système au signal d'entrée $e(t)$ est le signal $s(t)$ ayant pour transformée de Fourier :

$$S(f) = E(f).H(f) = E(f).|H(f)|.e^{-j\angle(f)}$$

Donc tout filtre physiquement réalisable déphase.

1.2.6 Poles et zéros

Une autre possibilité de caractérisation des filtres LIT repose sur les poles et les zéros de la fonction de transfert. La théorie sous-jacente est la transformée de Laplace, qui introduit la notion de variable complexes dans le domaine fréquentiel.

Fonction de transfert

Un filtre LIT est modélisé par des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Soit :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{N} b_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \sum_{m=1}^{M} a_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} \tag{1.10}$$

Nous avons vu la propriété suivante pour la transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right] = (2j\pi f)^n X(f)$$

Donc :

$$Y(f) = \sum_{n=0}^{N} b_n (2j\pi f)^n X(f) + \sum_{m=1}^{M} a_m (2j\pi f)^m Y(f)$$

Dans cette équation, $2\pi f$ est une variable réelle. Nous généralisons au cas complexe, en remplaçant $2j\pi f$ par $p = \sigma + j\omega$. Cette transformation est la base de la transformée de LAPLACE.

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow Y(p)\left(1-\sum_{m=1}^{M} a_m p^m\right) &= \sum_{n=0}^{N} b_n p^n X(p) \\
\Leftrightarrow \frac{Y(p)}{X(p)} &= \frac{\sum_{n=0}^{N} b_n p^n}{1-\sum_{m=1}^{M} a_m p^m} \\
\Leftrightarrow H(p) &= \frac{b_0 + b_1 p + \ldots b_N p^N}{1 - a_1 p - \ldots - a_M p^M} \\
\Leftrightarrow H(p) &= \frac{b_N \prod_{i=1}^{N} (p - z_i)}{-a_M \prod_{i=1}^{M} (p - p_i)}
\end{aligned}$$

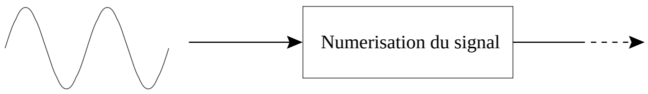
Les variables complexes z_i sont les *zéros* de $H(p)$, et les variables complexes p_i sont les *pôles*.
L'utilisation d'une variable p complexe ne permet plus de représenter graphiquement $H(p)$ en fonction de p, comme nous pouvions le faire avec la fréquence. Nous allons cependant utiliser la représentation des pôles et zéros dans le plan complexe pour mettre en valeur les propriétés du système.
Dans l'équation (1.10), les coefficients a_i et b_i sont réels dans le cas d'un système physiquement réalisable. Donc les zéros de la fonction de transfert seront réels ou bien deux à deux conjugués, et de même pour les zéros.

Chapitre 2

Signaux discrets

2.1 L'échantillonnage

Nous avons vu dans l'introduction les avantages liés à la numérisation des signaux. Les outils étudiés jusqu'à présent concernaient des signaux analogiques. L'échantillonnage est le traitement qui permet de passer d'un signal à temps continu à un signal à temps discret.
En nous basant sur les outils décrits dans la première partie, nous allons donner une correspondance mathématique à l'opération d'échantillonnage et étudier les répercussions dans les domaines fréquentiels et temporels.

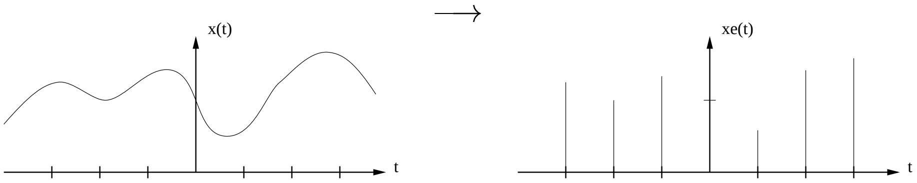


2.1.1 Échantillonnage idéal

Introduction

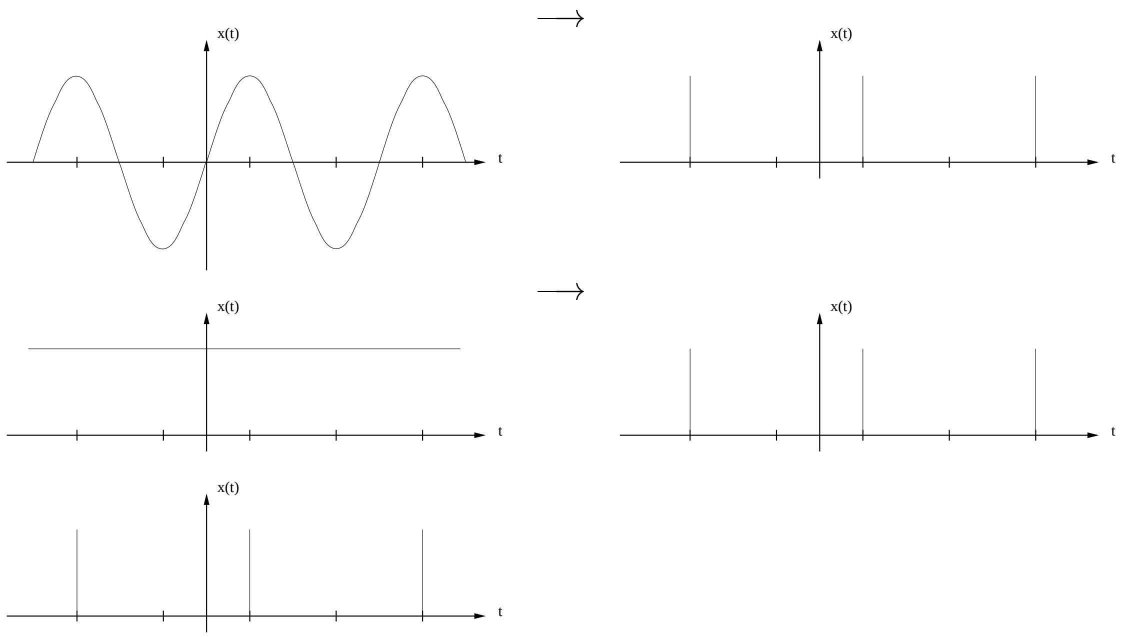
L'échantillonnage, à partir d'une fonction $x_c(t)$, produit une autre fonction $x_e[n]$ telle que, si T est un intervalle dans le temps :

$$x_e[n] = x_c(nT)$$



$x_c(t)$ $x_e[n]$

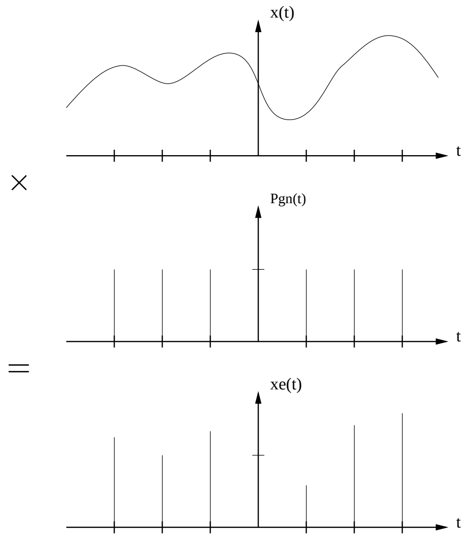
Les valeurs $x_c(nT)$ sont les valeurs données par l'échantillonnage de $x_c(t)$ à une fréquence $\frac{1}{T}$. L'instant dans la fonction x_e n'est décrit que par la variable n. La précision systématique de nT est en effet superflue dans la majeure partie des cas.
Les valeurs de la fonction échantillonnée sont ici décrites par des diracs. Qu'en est il en réalité ? La forme de stockage de ces valeurs n'a aucune importance. La seule chose importante est que l'on puisse savoir quelle valeur avait la fonction $x_c(t)$ à un instant donné.
Étudions maintenant deux signaux moins quelconques, et leur échantillonnage à une fréquence donnée :



Nous voyons qu'ici l'échantillonnage de deux signaux très différents nous donne le même résultat. Il y a donc dégradation du signal.
Que se passe-t-il donc qui cause cette dégradation ? Nous allons chercher la réponse en faisant l'étude de l'influence de l'échantillonnage dans le domaine fréquentiel.

Le peigne de Diracs

Échantillonner le signal $x_c(t)$ revient à le multiplier par une série d'impulsions de Dirac.



Cette suite d'impulsions s'écrit :

$$\mathrm{Pgn}_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e)$$

Avec

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pgn}_{T_e}(t) &\xrightarrow{T.F.} \frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\nu - nF_e) \\
&\xrightarrow{T.F.} F_e\mathrm{Pgn}_{F_e}(f)
\end{aligned}$$

Nous accepterons ce résultat, dont l'obtention fait appel aux calculs sur les distributions.

Étude fréquentielle de l'échantillonnage temporel

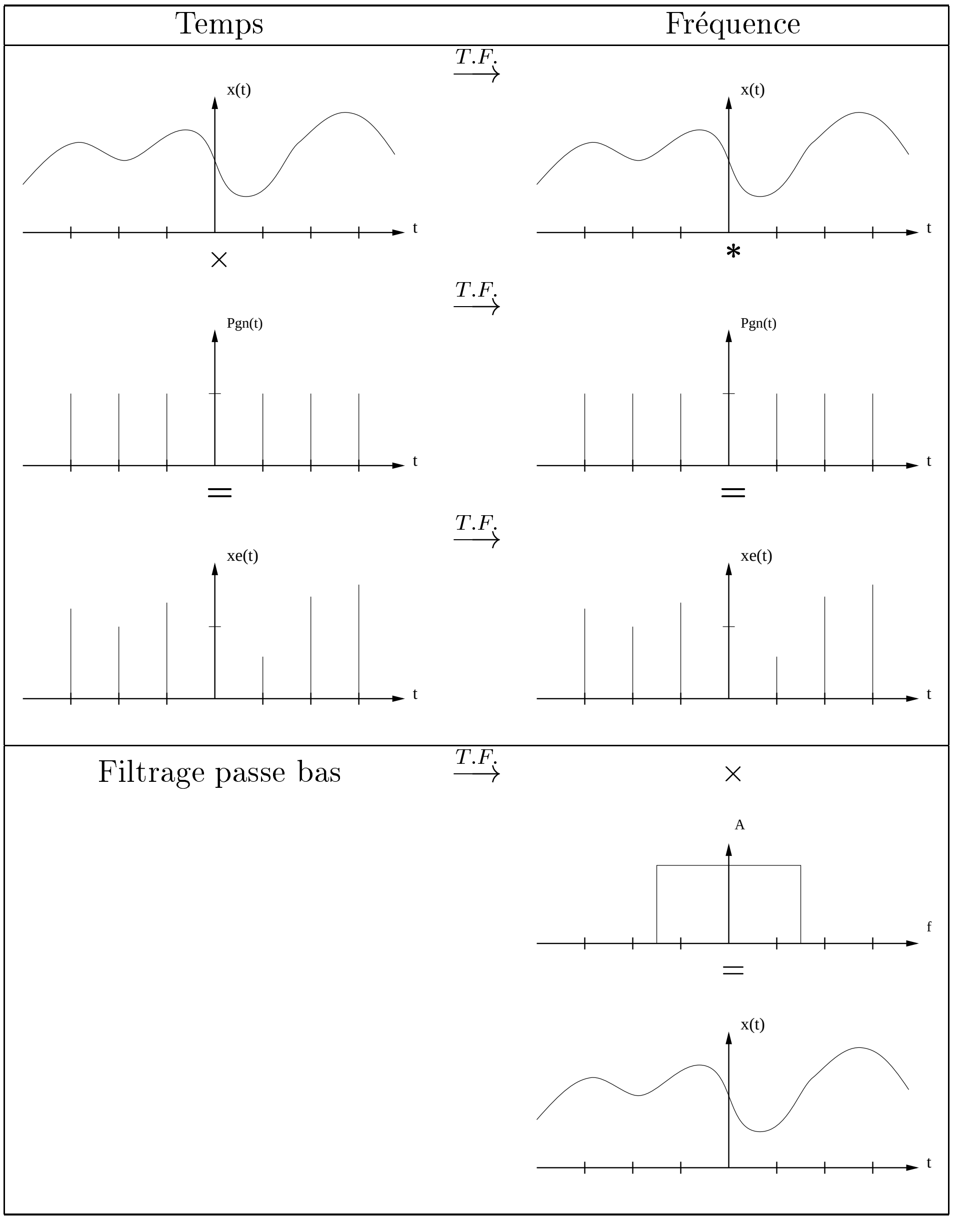
Soit $x_c(t) \xrightarrow{T.F.} X_c(f)$.
Soit $x_e(t)$ la fonction résultant de l'échantillonnage de la fonction $x_c(t)$. Nous allons chercher la fonction $X_e(f)$.
La fonction échantillonnée s'écrit :

$$\begin{aligned}
x_e(t) &= x(t).\mathrm{Pgn}_{T_e}(t) \\
&= x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_e) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-kT_e) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kT_e)\delta(t-kT_e) \\
&\xrightarrow{T.F.} X(f) * F_e\mathrm{Pgn}_{F_e}(f) \\
&\xrightarrow{T.F.} F_e\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(f).\delta(t-kF_e)
\end{aligned}$$

Donc le spectre de $x_e(t)$ est :

$$x_e(t) \xrightarrow{T.F.} F_e\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(f-kF_e) \tag{2.1}$$

Donc le spectre fréquentiel d'un signal échantillonné à F_e est la F_e-périodisation du spectre de ce signal.



Condition de conservation du signal

Que se passe-t-il si la fréquence d'échantillonnage est trop faible ? Nous voyons sur la figure ci-dessous que les spectres de fréquence se superposent (*aliasing*).

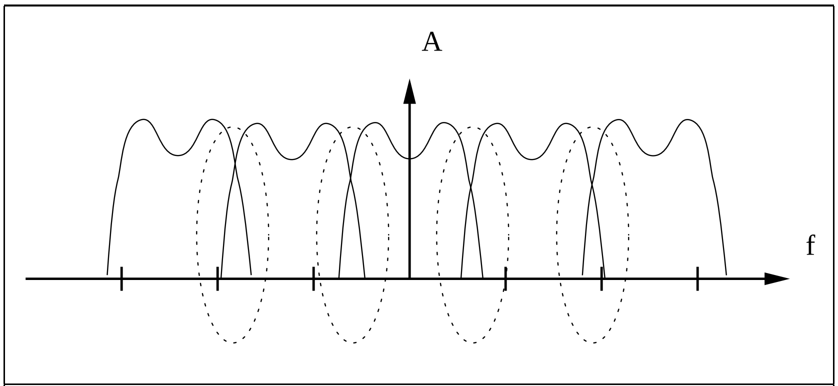


Illustration du recouvrement de spectre

Nous allons chercher la condition pour que l'échantillonnage n'entraîne aucune dégradation de l'information.
Si $x(t)$ a une transformée de Fourier $X(f)$ telle que $X(f) = 0$ pour $|f| > f_{max}$, alors le spectre du signal $x(t)$ s'étend sur la plage $(-f_{max}, f_{max})$. Pour qu'il n'y ait pas recouvrement des différents spectres, la fréquence d'échantillonnage doit être supérieure à $2f_{max}$.
Le théorème d'échantillonnage de Shannon énonce :

> Une condition suffisante pour qu'il soit possible de restituer (au moyen d'un filtre parfait) à partir du signal échantillonné le signal originel est que celui ci soit à spectre borné, et que la fréquence d'échantillonnage soit supérieure au double de la fréquence maximum de ce même spectre.

La formulation nous donne le critère de Nyquist :

$$F_e \geq 2F_{max}$$

Si cette condition n'est pas respectée, le signal peut être dégradé par l'échantillonnage : les spectres translatés se recouvrent alors, et l'on observe l'effet de *repliement des spectres.*

Conséquence sur l'échantillonnage d'un signal

Le but de l'échantillonnage est d'avoir une représentation numérique exacte du signal original. Pour espérer exploiter correctement un signal analogique après l'avoir échantillonné, il faut s'assurer que ce dernier est conforme au signal original. Nous venons de voir que ceci n'est possible qu'à la condition que le spectre de fréquences du signal soit supérieurement borné.
Même si le signal est naturellement borné, le bruit additif lié à toute transmission peut ajouter des composantes haute fréquence.
En conclusion, *toute opération d'échantillonnage doit systématiquement être précédée par un filtrage passe-bas du signal à échantillonner*. Les caractéristiques du filtrage doivent être telles que, étant donnée f_e la fréquence d'échantillonnage, les fréquences supérieures à $\frac{f_e}{2}$ soient supprimées en sortie du filtre.

2.1.2 Relation entre échantillonnage et périodicité

Nous avons vu dans la première partie du cours que

- l'analyse de Fourier d'un signal périodique, au moyen du développement en série de Fourier de sa fonction donnait un spectre discret
- l'analyse de Fourier d'un signal non périodique, au moyen de la transformée de Fourier de sa fonction, donnait un spectre continu.

L'échantillonnage d'un spectre fréquentiel, caractérisé par la multiplication par un peigne de Diracs, se traduira dans le domaine temporel par la convolution par un peigne de Diracs, et réciproquement.
Soit $x_p(t)$ une fonction T-périodique, et $x_r(t)$ sa réduction à une période. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} x_p(t) &= x_r(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) \\ \Leftrightarrow X_p(t) &= X_r(t) \times F \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f-kF) \end{aligned}$$

Ainsi, alors que l'échantillonnage temporel nous donne une périodisation du spectre, nous pouvons étudier une fonction T-périodique comme la fonction continue sur une période dont le spectre a été échantillonné à la fréquence $1/T$.

2.1.3 Échantillonnage des transformées de Fourier

Lorsque l'on calcule une transformée de Fourier par des moyens électroniques, on ne peut faire varier la fréquence que de manière discrète. Puisque la fréquence varie de manière discrète par pas Δf se pose donc le problème de l'échantillonnage en fréquence de la transformée de Fourier.
Considérons un signal réel connu sur une durée T. Supposons ce signal nul à l'extérieur de l'intervalle $(0, T)$. Soit $x(t)$ ce signal, ayant pour transformée de Fourier $X(f) = \mathcal{R}[X(f)] + j\mathcal{I}[X(f)]$.
Étant donnée la symétrie hermitienne sur $X(f)$ propre aux signaux réels, nous avons $x(-t) \xrightarrow{T.F.} \mathcal{R}[X(f)] - j\mathcal{I}[X(f)]$. D'où

$$\begin{aligned} x(t) + x(-t) &\xrightarrow{T.F.} \mathcal{R}[X(f)] \\ x(t) - x(-t) &\xrightarrow{T.F.} \mathcal{I}[X(f)] \end{aligned}$$

Le support de la transformée inverse de $\mathcal{R}[X(f)]$ comme de $\mathcal{I}[X(f)]$ sont $[-T, T]$. Pour être exploitée correctement, la fréquence doit donc être échantillonnée avec un pas de

$$\Delta f \leq \frac{1}{2T}$$

2.1.4 Récupération du signal

D'après (2.1), nous avons vu que le spectre d'un signal échantillonné à la fréquence F_e était la F_e-périodisation du spectre du signal continu. Nous avons vu aussi que, sous réserve de respecter le théorème de Shannon, nous pouvions récupérer le signal par un filtrage passe-bas idéal :

$$\left(X(f) * F_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kF_e)\right) \times \mathrm{rect}_{\frac{F_e}{2}}(f) = F_e X(f)$$

En prenant la transformée inverse des deux membres, nous obtenons :

$$\begin{aligned} x_e(t) * (F_e \,\mathrm{sinc}(\pi F_e t)) &= F_e x(t) \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e)\delta(t - kT_e) * \mathrm{sinc}(\pi F_e t) &= x(t) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) \,\mathrm{sinc}(\pi F_e(t - kT_e)) = x(t)$$

Ce résultat très important montre que l'on peut reconstituer une fonction à partir de ses échantillons, pourvu que le théorème de Shannon soit respecté. L'interpolation par $\mathrm{sinc}(\pi F_e(t - kT_e))$ est appelée *interpolation de Shannon*

Restitution du signal après échantillonnage

Le filtrage idéal permettant cette récupération du signal est effectué par le signal $\sqcap_{f_e}(f)$. On obtient alors :

$$\mathcal{F}[x] = \mathcal{F}[x_w] \times \sqcap_{f_e}$$

Soit, dans le domaine temporel :

$$x = x_e * \mathcal{F}^{-1}[\sqcap_{f_e}]$$

Nous avons :

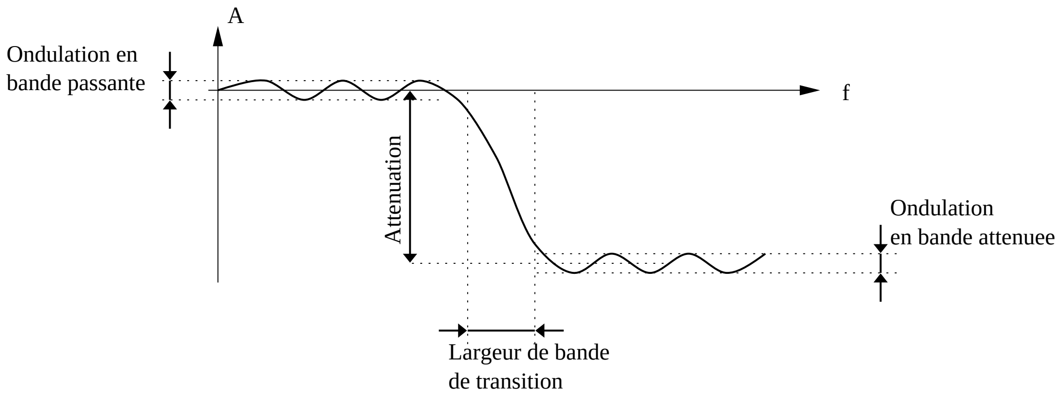
$$\begin{aligned} x_e(t) &= x(t) \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e) \\ \mathcal{F}^{-1}[\sqcap_{f_e}] &= \mathrm{sinc} \pi f_e t \end{aligned}$$

D'où, avec $t_e = \frac{1}{f_e}$:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nt_e) \times \mathrm{sinc}(\pi(f_e t - n))$$

Or nous avons vu dans le cours sur le filtrage qu'un tel filtre n'est pas réalisable, parce que non causal. Nous le constatons encore ici, puisque la reconstitution du signal $x(t)$ nécessite des valeurs $x(nt_e)$ à des instants postérieurs à t.
En comparaison, un filtre réel apportera une certaine distorsion du signal, due à :

– une ondulation en bande passante (d'amplitude nulle pour le filtre idéal)
– une bande de transition (de largeur nulle pour le filtre idéal)
– un affaiblissement en bande coupée (infini pour le filtre idéal)



La limite de $f_e = 2f_{max}$ est donc *théorique*. Une réalisation pratique devra nécessairement comprendre une marge plus importante dépendant des caractéristiques du filtre utilisé.

Interpolation réalisable en temps réel

Pour $\tau \in [0, T_e[$ nous pouvons développer $x(t)$ en série de Taylor :

$$x(nt_e + \tau) = x(nt_e) + \sum_{k=1}^{N} \frac{\tau^k}{k!}.x^{(k)}(nt_e) + \frac{\tau^N}{N!}.\Theta(\tau)$$

que nous approchons par :

$$x(nt_e + \tau) \approx x(nt_e) + \sum_{k=1}^{N} \frac{\tau^k}{k!}.x^{(k)}(nt_e)$$

En remplaçant les dérivées par des différences finies :

$$\begin{aligned} x^{(k)}(nt_e) &\approx \frac{1}{{t_e}^k} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i.C_k^i.x((n-i)t_e) \\ x(nt_e + \tau) &\approx x(nt_e) + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} \left(\frac{\tau}{t_e}\right)^k . \sum_{i=0}^{k} (-1)^i.C_k^i.x((n-i)t_e) \end{aligned}$$

Cette formule définit l'interpolation réelle d'ordre N lorsque $N > 1$. L'interpolation réelle d'ordre 0 est :

$$x(nt_e + \tau) \approx x(nt_e)$$

Le bloqueur d'ordre 0 correspond en fait à une convolution signal du échantillonné par un signal carré. Dans le domaine fréquentiel, cela correspond donc à une atténuation en sinc. Les hautes fréquences sont les irrégularités de notre signal temporel (le spectre original était à support borné). Pour les supprimer, il faut donc faire suive le bloqueur d'ordre 0 par un lissage, effectué par un filtre passe bas.

2.1.5 Échantillonnage réel

Nous avons dans les précédentes parties considéré que l'échantillonnage consistait en la multiplication du signal continu par un peigne de Diracs. Il s'agit bien entendu d'une idéalisation, une impulsion infiniment étroite n'étant pas réalisable pratiquement.
Pour se rapprocher de la réalité, nous allons maintenant considérer que le signal échantillonneur n'est plus un peigne de dirac, mais une série d'impulsions rectangulaires.
Le signal échantillonné sera :

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \underbrace{\left(x(t)\mathrm{Pgn}_{T_e}(t)\right)}_{x_e(t)} * \mathrm{rect}_\tau(t) \\ X_r(f) &= \underbrace{\left(S(f) * (F_e \mathrm{Pgn}_{F_e}(f))\right)}_{X_e(f)} \times \tau \,\mathrm{sinc}(\pi f \tau) \end{aligned}$$

Le spectre du signal échantillonné par une série d'impulsions rectangulaires est donc le même que dans le cas idéal, mais subissant une atténuation dans les hautes fréquences.

2.1.6 Étude du sous-échantillonnage

Soit $x(t)$ à support fréquentiel $[f_{min}, f_{max}]$.
Soit $x_e(t)$ le signal $x(t)$ échantillonné à la fréquence f_e. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\begin{aligned} -f_{min} + n f_e &< f_{min} \\ -f_{max} + (n+1) f_e &> f_{max} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dans ce cas, le critère de Nyquist n'est pas vérifié, mais il n'y a pas de repliement du spectre : nous sommes dans le cas du sous-échantillonnage.
L'entier n désigne l'ordre du sous-échantillonnage.
D'après (2.2) :

$$\begin{aligned} \frac{2f_{max}}{n+1} < & \quad f_e \quad < \frac{2f_{min}}{n} \\ \Rightarrow \frac{f_{max}}{n+1} < & \quad \tfrac{f_{min}}{n} \end{aligned}$$

d'où :

$$1 \leq n < \frac{f_{min}}{f_{max} - f_{min}}$$

Donc, n existe ssi $f_{min} > f_{max} - f_{min} \Leftrightarrow \boxed{f_{max} < 2\, f_{min}}$
Si $f_{max} < 2\, f_{min}$ il existe un sous échantillonnage d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, qui vérifie :

$$1 \leq n < \frac{f_{min}}{f_{max} - f_{min}}$$

La fréquence d'échantillonnage est alors telle que

$$\frac{2f_{max}}{n+1} < f_e < \frac{2f_{min}}{n}$$

En pratique, il y a intérêt à choisir des ordres de sous-échantillonnage élevés ; la fréquence d'échantillonnage est alors plus basse, et le nombre d'échantillons à traiter par unité de temps est plus faible.

2.2 Filtrage numérique

Nous avons déduit des chapitres précédents que :

- l'échantillonnage permettait d'obtenir une représentation à temps discret d'un signal analogique
- Cette opération est complété par la *quantification* pour obtenir un signal à support et à valeurs discrets, soit un *signal numérique*
- Ce signal numérique est re-transformé en signal analogique par l'opération de restitution
- Entre la conversion analogique–numérique (CAN) et la conversion analogique–numérique (CNA), un traitement est appliqué, qui peut être de plusieurs types :
  - filtrage
  - modulation–démodulation
  - analyse fréquentielle
  - ...

Nous allons ici nous intéresser au filtrage numérique. Tout le problème consiste en la réalisation d'un système pour atteindre un but pré-défini. Nous n'irons pas aussi loin, mais présenterons les outils principalement utilisés, et donneront un aperçu des techniques utilisées pour concevoir un filtre numérique.
Pour toutes les opérations concernant le filtrage numérique, l'outil mathématique, pendant de la transformation de Laplace pour les signaux analogiques, est la transformation en z.
Nous nous cantonnerons ici encore au cas des filtres linéaires invariants dans le temps, dont le comportement est régi par une équation aux différences

2.2.1 Fréquence normalisée

L'échantillonnage d'un signal analogique $x(t)$ à une fréquence F_e génère une suite d'échantillons $x(kT_e)$. Dans le cas où il n'y a pas d'ambiguïté, le T_e sera omis, et les échantillons seront alors repérés par $x(k)$ ou x_k.
Dans le domaine fréquentiel, la fréquence d'échantillonnage étant assimilée à 1, le spectre est 1-périodique.

2.2.2 Définition de la Transformée en z

La transformée en z est définie par :

$$\boxed{X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k}} \tag{2.3}$$

La transformée en z inverse s'écrit :

$$\boxed{x(k) = \frac{1}{2j\pi} \oint_c X(z) z^{n-1}\, dz} \tag{2.4}$$

Comme toutes les séries, l'équation (2.3) pose le problème de la convergence. Pour un signal donné, l'ensemble des z pour lesquels la série converge est appelé région de convergence.
La définition du domaine de convergence de la transformée en z est indissociable de son expression.
Exemples :

- <u>Exemple 1</u>
  Soit le signal $x(k) = u(k)$.

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \\ X(z) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} z^{-k} \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \qquad \text{pour } |z| > 1 \end{aligned}$$

- <u>Exemple 2</u>
  Soit $x_1(k) = a^k u(k)$.

$$\begin{aligned} X_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a z^{-k} \\ &= \frac{1}{1 - az^{-1}} \text{ pour } |z| > a \end{aligned}$$

- <u>Exemple 3</u>
  Soit $x_2(k) = -a^k u(-k-1)$.

$$\begin{aligned} X_2(z) &= -\sum_{k=-\infty}^{-1} a^k z^{-k} \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} a^{-k} z^k \\ &= \frac{-a^{-1} z}{1 - a^{-1} z} \\ &= \frac{1}{1 - az^{-1}} \text{ pour } |z| < a \end{aligned}$$

2.2.3 Relation avec la transformée de Fourier

Nous avons défini la transformation de Fourier comme étant (voir (1.5)) :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2i\pi f t}\, dt$$

Pour un signal échantillonné, ramené à la fréquence normalisée ($T_e = 1$) :

$$\begin{aligned}
x_e(n) &= x(t) \times \mathrm{Pgn}(t) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) \times \delta(t-k) \\
X_e(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t) e^{-2j\pi f t}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-k) e^{-2j\pi f t}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-2j\pi f k} \delta(t-k)\, dt
\end{aligned}$$

En supposant que la série converge :

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-2j\pi f k} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-k)\, dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-2j\pi f k}
\end{aligned}$$

La transformée de Fourier d'un signal échantillonné est donc sa transformée en z évaluée en $z = e^{2j\pi f}$.

2.2.4 Propriétés

Linéarité : soient $x_1(k) \xrightarrow{Z} X_1(z)$ et $x_2(k) \xrightarrow{Z} X_2(z)$ deux signaux

$$\begin{aligned}
\lambda x_1(k) + \mu x_2(k) &\xrightarrow{Z} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\lambda x_1(k) + \mu x_2(k)) z^{-k} \\
&\xrightarrow{Z} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\lambda x_1(k) z^{-k} + \mu x_2(k) z^{-k}) \\
&\xrightarrow{Z} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\lambda x_1(k) z^{-k} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu x_2(k) z^{-k} \\
&\xrightarrow{Z} \lambda \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) z^{-k} + \mu \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k) z^{-k}
\end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\lambda x_1(k) + \mu x_2(k) \xrightarrow{Z} \lambda X_1(z) + \mu X_2(z)} \tag{2.5}$$

Décalage temporel : soit $x(k) \xrightarrow{Z} X(z)$

$$x(k-k_0) \xrightarrow{Z} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k-k_0) z^{-k}$$

posons $l = k - k_0 \Leftrightarrow k = l + k_0$

$$\begin{aligned} x(k-k_0) &\xrightarrow{Z} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) z^{-l-k_0} \\ &\xrightarrow{Z} z^{-k_0} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) z^{-l} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{x(k-k_0) \xrightarrow{Z} z^{-k_0} X(z)} \tag{2.6}$$

Cette propriété est la plus remarquable. Elle associe en effet la multiplication par z^{-1} à un retard d'une unité de temps ; elle associe donc un échantillon à l'échantillon suivant de la série numérique.

Multiplication par une série exponentielle : soit $x(k) \xrightarrow{Z} X(z)$

$$\begin{aligned} a^k x(k) &\xrightarrow{Z} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k x(k) z^{-k} \\ &\xrightarrow{Z} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \left(\frac{z}{a}\right)^{-k} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{a^k x(k) \xrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{a}\right)} \tag{2.7}$$

Produit simple et produit de convolution :

$$\boxed{x_1(k) * x_2(k) \xrightarrow{Z} X_1(z) X_2(z)} \tag{2.8}$$

$$\boxed{x_1(k) x_2(k) \xrightarrow{Z} \frac{1}{2j\pi} \oint_C X_1(\nu) X_2\left(\frac{z}{\nu}\right) \nu^{-1}\, d\nu} \tag{2.9}$$

2.2.5 Signaux numériques remarquables

Impulsion :

$$d(k) = \begin{cases} 1 & \text{si k=0} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Échelon :

$$u(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

Porte :

$$\mathrm{rect}_K(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq k \leq K-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.2.6 Inversion de la transformée en z

La formule n'est pas utilisée telle quelle, à cause de la complexité de la résolution. Plusieurs méthodes sont disponibles pour résoudre l'équation (2.4) et obtenir la transformée en z inverse :

- Intégration directe par les résidus
  le théorème de Cauchy sur l'intégrale le long d'un contour indique que :

  $$x(k) = \frac{1}{2j\pi} \oint_C X(z) z^{n-1}\, dz = \sum \text{résidus de } X(z)z^{k-1} \text{ dans } C$$

  avec

  $$\mathrm{Res}_a^q = lim_{z \to a} \frac{1}{(q-1)!} \frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}} \left[X(z) z^{k-1} (z-a)^q \right]$$

- Développement en série de puissance
  Comme la transformée en z $X(z)$ est une fonction analytique de z dans la région de convergence, on peut la développer en série de Taylor en fonction de z^{-1}. en remarquant que la définition (2.3) est une série de la même forme, on peut, par identification, obtenir les échantillons $x(k)$ du signal.

- Développement par division
  Une grande classe de transformées en z peut se mettre sous la forme d'un quotient de deux polynômes en z ou en z^{-1} :

  $$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = C \frac{\prod_{m=1}^{M} (z - z_m)}{\prod_{n=1}^{N} (z - p_n)}$$

En effectuant la division, on obtient un polynôme en z^{-1}. Par identification avec la formule de la transformation en z (2.3), on trouve les échantillons du signal.
Exemple : Soit la transformée en z

$$X(z) = \frac{a^{-1}}{1 - 1,414z^{-1} + z^{-2}} \text{ pour } |z| > 1$$

La division nous donne :

$$z^{-1} \div (1 - 1,414z^{-1} + z^{-2}) = z^{-1} + 1,414z^{-2} + z^{-3} + 0 - z^{-5} - 1,414z^{-6} + \dots$$

L'identification dans la relation (2.3) nous donne :

$$x(0) = 0, x(1) = 1, x(2) = 1,414, x(3) = 1, x(4) = 0, x(5) = -1, \dots$$

L'inconvénient est que nous n'avons aucune information sur la forme analytique du signal.

- Développement en fractions partielles
  Les transformées en z rationnelles peuvent êtres décomposées en fractions partielles, et utiliser la linéarité pour sommer les transformées en z inverses de chaque fraction.

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = S(z) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{z - p_i}$$

Exemple : Soit la transformée en z :

$$X(z) = \frac{1}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} \text{ pour } |z| > 2$$

Comme le degré du numérateur est strictement supérieur à celui du dénominateur, le polynôme $S(z)$ est identiquement nul. Les pôles de $X(z)$ sont donnés par les racines de l'équation : $2z^{-2} - 2z^{-1} + 1 = 0$.
Il y a deux pôles simples : $z^{-1} = 1$ et $z^{-1} = 1/2$.
Nous pouvons alors écrire :

$$X(z) = \frac{1/2}{(z^{-1} - 1)(z^{-1} - \frac{1}{2})} = \frac{\alpha_1}{z^{-1} - 1} + \frac{\alpha_2}{z^{-1} - \frac{1}{2}}$$

La résolution nous donne $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = -1$.
Nous avons donc :

$$X(z) = \frac{1}{z^{-1} - 1} - \frac{1}{z^{-1} - \frac{1}{2}} = \frac{2}{1 - 2z^{-1}} - \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

D'après l'exemple 2 ci-dessus, cela nous donne :

$$x(k) = 2 \times 2^k u(k) - u(k) = (2^{k+1} - 1)u(k)$$

2.2.7 Notions de filtrage numérique

La forme générale des filtres numériques est la suivante :

$$\boxed{y_k = \sum_{i=0}^{N} a_i x_{k-i} - \sum_{j=1}^{M} b_j y_{k-j}} \tag{2.10}$$

C'est *l'équation aux différences.*
Deux types de filtres peuvent êtres distingués :

- les *filtres récursifs*, pour lesquels $\exists j$ tel que $b_j \neq 0$;
- les *filtres non récursifs*, pour lesquels $\forall j, b_j = 0$.

Nous avions vu pour le domaine des filtres analogiques que la sortie $y(t)$ correspondant à une entrée $x(t)$ pouvait s'écrire :

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

avec $h(t)$ réponse impulsionnelle du filtre. En complément de l'écriture sous la forme (2.10), un filtre numérique peut aussi être décrit par un produit de convolution :

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k x_{n-k} \tag{2.11}$$

avec h_k réponse impulsionnelle du filtre.
Cette écriture nous amène à distinguer encore deux classes de filtres :

- à *réponse impulsionnelle finie* (RIF), pour lesquels $\exists K$ tel que $\forall k > K, h_k = 0$;
- à *réponse impulsionnelle infinie* (RII), pour lesquels h_k est à support infini.

2.2.8 Filtres numériques et transformée en z

La transformée en z d'une réponse impulsionnelle va nous donner, similairement au cas analogique, une fonction de transfert en z. En effet, si nous appliquons la transformée en z à l'équation (2.10), nous obtenons :

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{i=0}^{N} a_i \mathcal{Z}[x_{k-i}] - \sum_{j=1}^{M} b_j \mathcal{Z}[y_{k-j}] \\ &= \sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i} X(z) - \sum_{j=1}^{M} b_j z^{-j} Y(z) \end{aligned}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}}{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j}}$$

La connaissance de $H(z)$ permet de connaître notamment la stabilité et la causalité du filtre.

- Causalité : la transformée en z d'un signal causal converge à l'extérieur d'un cercle de rayon R_{g-}. Comme une transformée en z ne converge jamais à un pôle, tous les pôles de $G(z)$ doivent être à l'intérieur de ce cercle.
- Stabilité : si le système est stable, alors sa réponse impulsionnelle est absolument sommable :
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |g(k)| < \infty$$
Cela correspond à la transformée en z pour $|z| = 1$, c'est à dire pour le cercle unité.
Donc la zone de convergence d'un système stable contient le cercle unité.
- Système causal et stable : pour un système causal et stable, la fonction de transfert converge à l'extérieur d'un cercle dont le rayon est plus petit que l'unité.

> Donc les pôles de la fonction de transfert d'un système linéaire invariant causal et stable doivent se trouver à l'intérieur du cercle unité.

2.2.9 Équation aux différences du premier ordre

Étudions l'équation aux différences $y(k) - ay(k-1) = x(k)$.
La transformée en z de cette équation est donnée par $Y(z)(1 - az^{-1}) = X(z)$.
La fonction de transfert est alors $G(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$.
Pour un système stable, la région de convergence doit inclure le cercle unité ; soit $|a| \neq 1$.
Pour obtenir un système causal, on doit en plus avoir $|a| < 1$.
La réponse impulsionnelle peut alors être obtenue récursivement :

k	$x(k)$	$y(k)$
< 0	0	0
0	1	1
1	0	$0 + a \times 1 = a$
2	0	$0 + a \times a = a^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	0	a^k

2.2.10 Conception des filtres numériques

Le modèle du filtre peut être obtenu de deux manières différentes :

1. transposition depuis un filtre analogique : en effet, la conception des filtres analogiques a précédé celle des filtres numériques, et ils bénéficient d'un ensemble d'outils bien connus.

2. conception numérique directe : ces méthodes de conception assistée par ordinateur sont plus récentes et en pleine évolution.

La synthèse, une fois le filtre décidé, peut encore une fois se faire de différentes manières :

1. par l'équation au différences : c'est le cas le plus général pour les filtres linéaires invariants dans le temps
2. par l'équation de convolution : pour les filtre RIF
3. en utilisant la TFD pour faire la multiplication dans le domaine fréquentiel (plus intéressant à partir d'un nombre de coefficients > 30 dans la RIF)

La réalisation peut se faire

1. en utilisant des composants numériques
2. par l'implémentation logicielle d'un algorithme

2.3 La transformée de Fourier Discrète

Dans le but d'étudier les signaux à l'aide d'algorithmes, nous avons étudié l'échantillonnage temporel. L'analyse spectrale nécessite elle aussi un échantillonnage, dans le domaine fréquentiel cette fois ci.
Cet échantillonnage fréquentiel va donc, en vertu du théorème de Plancherel, entraîner une périodisation dans le temps.
On supposera dans la suite que le théorème de Shannon est respecté.

2.3.1 Introduction

À tout signal à temps continu on peut associer, après échantillonnage régulier du signal, une séquence finie de nombres réels ou complexes.
Soit $x(t)$ la fonction d'un signal à temps continu, admettant une transformée de Fourier $X(f)$. Soit $x_e(t)$ le signal résultant de l'échantillonnage de $x(t)$ à la période T_e. Soit $X_e(t)$ la transformée de Fourier de la distribution $x_e(t)$.
Supposons X à support borné $[-F_M, F_M]$. Posons $F_e = 2F_M$, donc F_e respecte tout juste le théorème de Shannon. X_e est donc une fonction périodique de période F_e, et le nombre d'échantillons temporels est minimal.
Supposons x_e à support borné $[0, T_0]$. Si nous échantillonnons maintenant X_e à la limite des possibilités (c-à-d en minimisant le nombre d'échantillons), nous aurons $F_f = \frac{1}{T_0}$.
Le nombre d'échantillons dans le temps est donc $T_0 \div T_e = T_0 \times 2F_M$.
Le nombre d'échantillons en fréquence est lui $2F_e \div F_f = 2F_e \times T_0$.
Donc *un signal périodique à durée limitée N peut être entièrement reconstitué à partir des N échantillons de sa transformée de Fourier.*

2.3.2 Définition de la transformée de Fourier discrète d'une séquence finie

La transformée de Fourier discrète de la séquence finie $(x_0, \dots, x_{N-1})$ est la séquence de même longueur N définie par :

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{\frac{-2j\pi nk}{N}}$$

En posant $\mathcal{W}_N = e^{\frac{2j\pi}{N}}$, nous avons :

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \mathcal{W}_N^{-nk} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq N-1.$$

Ce système de N relations linéaires permet de transformer la séquence finie (*temporelle*) $(x_0, \dots, x_{N-1})$ en la séquence (*fréquentielle*) de même longueur N $(X_0, \dots, X_{N-1})$.
Cette transformée est bijective, donc inversible. Elle s'appelle *transformation de Fourier discrète d'ordre N* et sera désignée par $(\text{T.F.D.})_N$ (ou $(\text{D.F.T.})_N$ en anglais).

La transformée de Fourier discrète inverse de la séquence fréquentielle finie $(X_0, \dots, X_{N-1})$ est la séquence temporelle de même longueur N $(x_0, \dots, x_{N-1})$ définie par

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \mathcal{W}_N^{kn} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}, 0 \leq n \leq N-1.$$

La transformation de Fourier discrète inverse d'ordre N est désignée par $(\text{T.F.D.})_N^{-1}$.
La transformée de Fourier discrète d'une séquence temporelle de durée N est obtenue à une constante multiplicative près par échantillonnage de période $\frac{1}{N}$ de la transformée de Fourier continue de la même séquence.
Les expressions de la $(\text{T.F.D.})_N$ et de la $(\text{T.F.D.})_N^{-1}$ montrent qu'il est possible de calculer les transformées de Fourier discrètes (directe et inverse) des séquences de longueur N de nombres complexes à l'aide d'un calculateur numérique. De plus, le calcul direct ou inverse sont relativement semblables ; on a en effet

$$(\text{T.F.D.})_N^{-1}(x) = (\text{T.F.D.})_N^{*}(x^*)$$

Dans le cas des signaux réels, nous avons : $X_{-k} = X_k^*$, la moitié des calculs peuvent donc être évités.

2.3.3 Propriétés de $\mathcal{W}_N$

Les $\mathcal{W}_N$ sont les racines n-ièmes de l'unité.

séparabilité

$$\mathcal{W}_N^{k+l} = \mathcal{W}_N^k \mathcal{W}_N^l$$

périodicité

$$\mathcal{W}_N^{k+lN} = \mathcal{W}_N^k$$

valeurs spéciales

$$\mathcal{W}_N^{lN} = 1$$

$$\mathcal{W}_N^{N/2} = -1$$

$$\mathcal{W}_N^{k+N/2} = -\mathcal{W}_N^k$$

$$\mathcal{W}_N^2 = \mathcal{W}_{N/2}$$

orthonormalité

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mathcal{W}_N^{nk} = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = lN \text{ avec } l \text{ entier} \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$$

2.3.4 Expressions matricielles des transformations de Fourier discrètes

Soient $[x]_n$ et $[X]_n$ les matrices colonnes à N lignes :

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{bmatrix}$$

Posons :

$$[\text{T.F.D.}]_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \mathcal{W}_N^{-1} & \cdots & \mathcal{W}_N^{-k} & \cdots & \mathcal{W}_N^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \mathcal{W}_N^{-n} & \cdots & \mathcal{W}_N^{-nk} & \cdots & \mathcal{W}_N^{-n(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \mathcal{W}_N^{-(N-1)} & \cdots & \mathcal{W}_N^{-(N-1)k} & \cdots & \mathcal{W}_N^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

La transformation de Fourier discrète est alors définie par l'égalité matricielle :

$$[X]_N = (\text{T.F.D.})_N[x]_n$$

L'inverse de la matrice carrée $(\text{T.F.D.})_N$ est :

$$(\text{T.F.D.})_N^{-1} = \frac{1}{N}\overline{(\text{T.F.D.})_N} = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \mathcal{W}_N^{1} & \cdots & \mathcal{W}_N^{n} & \cdots & \mathcal{W}_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \mathcal{W}_N^{k} & \cdots & \mathcal{W}_N^{kn} & \cdots & \mathcal{W}_N^{(N-1)k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \mathcal{W}_N^{N-1} & \cdots & \mathcal{W}_N^{n(N-1)} & \cdots & \mathcal{W}_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

2.3.5 Les propriétés de la TFD

La plupart des propriétés de la TFD sont similaires à celles de la transformation de Fourier.

Linéarité

Idem ; Néanmoins, si les durées des deux signaux sont différentes, la durée du signal résultat sera la plus longue des deux.

Décalage cyclique

Soit $x_p(k)$ un signal N-périodique dont la transformée de Fourier est $X_p(n)$. Soit $y_p(k)$ la version décalée de $x_p(k)$: $y_p(k) = x_p(k-k_0)$. Il est clair que l'influence de k_0 est modulo N.
La TFD de y_p est alors :

$$Y_p(n) = \mathcal{W}_N^{-nk_0} X_p(n)$$

Produit de convolution

Soient $x_p(k)$ et $g_p(k)$ deux signaux N-périodiques.

$$\begin{aligned} y_p(k) &= \sum_{l=0}^{N-1} x_p(l) g_p(k-l) \\ Y_p(n) &= X_p(n) G_p(n) \end{aligned}$$

Le résultat $Y_p(n)$ est N-périodique. Attention à la restriction dans le cas de signaux à durée finie.

2.3.6 La transformation de Fourier discrète et la convolution

Produit de convolution de séquences finies

Soit la séquence $\{x_n; n \in \mathbb{Z}\}$ de nombres réels ou complexes. Nous appelons *support* de cette séquence le plus petit intervalle I d'entiers tels que, si $n \notin I$, alors $x_n = 0$. Si la séquence est finie et de longueur N, son support est fini de cardinal $N' \leq N$.

Soient alors deux séquences finies :
$x = (x_0, \ldots, x_{N-1})$, dont le support a pour cardinal N' ; $y = (x_0, \ldots, y_{M-1})$, dont le support a pour cardinal M'. Le produit de convolution de ces deux séquences est donc la séquence $x * y$ définie par :

$$[x * y](b) = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

La séquence $x * y$ est finie et a pour cardinal $N' + M' - 1$.

Expression de la TFD en termes de produit de convolution

La TFD de la séquence finie $(x_0, \ldots, x_{N-1})$ est la séquence $(X_0, \ldots, X_{N-1})$ définie par :

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} x_n \mathcal{W}_N^{-nk}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq N-1$$

avec $\mathcal{W}_N = e^{j\frac{2\pi}{N}}$.
On peut alors écrire, compte tenu de l'identité $nk = \frac{1}{2}(n^2 + k^2 - (k-n)^2)$:

$$X_k = \frac{1}{N} \mathcal{W}_N^{-\frac{k^2}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} \left(x_n \mathcal{W}_N^{-\frac{n^2}{2}} \right) \mathcal{W}_N^{\frac{(k-n)^2}{2}}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq N-1.$$

2.3.7 Utilisation de la T.F.D. dans le cas des signaux à temps continu

2.3.8 Trash

La fonction $X_e(f)$ est périodique, de période $f_e = \frac{1}{T_e}$.
La périodicité nous permet d'introduire comme variable, à la place de la fréquence physique f le rapport :

$$\nu = \frac{f}{f_e}.$$

Cette variable ν est dépouvue de dimension. On l'appelle *fréquence normalisée*.
Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
X(f_e) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t) e^{-2j\pi f t}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e)\delta(t - kT_e) e^{-2j\pi f t}\, dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e) e^{-2j\pi f (kT_e)}\, dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{x(kT_e)}_{x_k} e^{-2j\pi f k T_e} \\
X(\nu) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-2j\pi k \nu}
\end{aligned}$$

Cette fonction $X(\nu)$ est donc périodique, de période 1. Elle est la *transformée de Fourier de la séquence $\{x_n; n \in \mathbb{Z}\}$ de nombres réels ou complexes.*

.1 Remarques sur les nombres complexes

.1.1 Définition

L'ensemble des nombres complexes s'appelle $\mathbb{C}$.
L'ensemble des réels est inclus dans l'ensemble des complexes :$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
j est le symbole utilisé par les physiciens pour les nombres imaginaires.
Un nombre complexe peut s'écrire :

$$c = a + jb$$

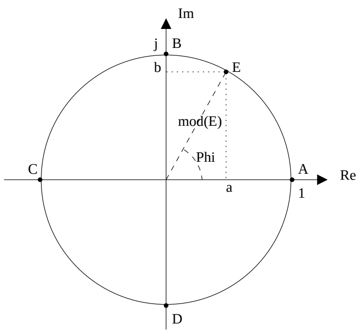
où $c \in \mathbb{C},\ a, b \in \mathbb{R}$.
Nous définissons alors :

la **partie réelle** de c	$\Re(c) = a$
la **partie imaginaire** de c	$\Im(c) = b$
la **norme** ou le **module** de c	$\lvert c\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$
la **phase** de c	$\angle c = \frac{a}{\lvert(a)\rvert} \arctan(\frac{b}{a})$

Nous pouvons donc travailler avec deux représentation de c :

$$\begin{aligned} c &= a + jb \\ c &= |c| e^{j\angle c} \end{aligned}$$

.1.2 Le plan complexe



Sur la figure ci-dessus, nous avons :

$$
\begin{aligned}
A = &\quad 1 + j \times 0 = 1 &&= \sqrt{1+0} \times \underbrace{e^{j \overbrace{\arctan(\frac{0}{1})}^{=0}}}_{=1} = 1 \\
B = &\quad 0 + j \times 1 = j &&= \sqrt{0+1} \times \underbrace{e^{j \overbrace{\arctan(\infty)}^{=\frac{\pi}{2}}}}_{=j} = j \\
C = &\quad -1 + j \times 0 = -1 &&= \sqrt{1+0} \times e^{j(-1)\arctan(\frac{0}{1})} = -1 \\
D = &\quad 0 - j \times 1 = -j &&= \sqrt{0+1} \times e^{j\arctan(-\infty)} = j \\
E = &\quad a + j \times b &&= |E| \times e^{j\angle E}
\end{aligned}
$$

Dans le plan complexe, un point situé sur l'axe vertical (imaginaire) est imaginaire pur ; un point situé sur l'axe horizontal (réel) est réel pur. Le point E montre l'équivalence entre la représentation rectangulaire $((a, b))$ et polaire $((|, |\angle))$.