Université de Strasbourg
UFR de Mathématique et Informatique

Session de Mai-Juin 2009
M1 d'Informatique

Traitement d'Images

Corrigé
Christian RONSE

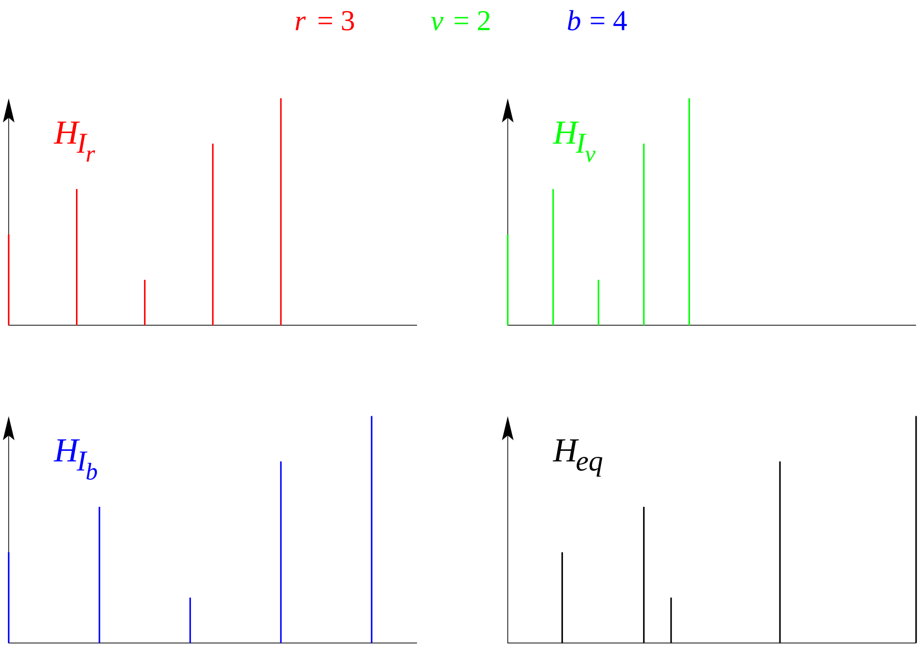
(1) Couleurs et égalisation d'histogramme

Supposons $r, v, b > 0$; le cas où l'un d'eux vaut 0 sera brièvement discuté à la fin. Soient H_{I_r}, H_{I_v} et H_{I_b} les histogrammes de I_r, I_v et I_b, et soient C_{I_r}, C_{I_v} et C_{I_b} leurs histogrammes cumulatifs. Soit K l'image $p \mapsto n_p$, en d'autres termes, pour tout pixel p on a $I_r(p) = r \cdot K(p)$, $I_v(p) = v \cdot K(p)$ et $I_b(p) = b \cdot K(p)$. Soient H l'histogramme de K et C son histogramme cumulatif.

Q1. Pour un niveau g non multiple de r, il n'y a aucun pixel p avec $I_r(p) = g$, donc $H_{I_r}(g) = 0$. Pour $g = r \cdot m$, un pixel p satisfait $I_r(p) = g$ ssi $r \cdot K(p) = r \cdot m$, c.-à-d. $K(p) = m$. Donc

$$H_{I_r}(r \cdot m) = \big|\{p \mid I_r(p) = r \cdot m\}\big| = \big|\{p \mid K(p) = m\}\big| = H(m) \ .$$

De même, on a $H_{I_v}(g) = 0$ pour g non multiple de v, et $H_{I_v}(v \cdot m) = H(m)$, ainsi que $H_{I_b}(g) = 0$ pour g non multiple de b, et $H_{I_b}(b \cdot m) = H(m)$. En conclusion, H_{I_r}, H_{I_v} et H_{I_b} ont la même forme générale, avec la même séquence de pics, la seule différence est l'écart entre leurs différents pics, qui sont proportionnels respectivement à r, v et b. C'est ce que nous illustrons sur la figure pour $r = 3$, $v = 2$ et $b = 4$.



Q2. Vu que $H_{I_r}(g) = 0$ pour g non multiple de r, on notera que

$$C_{I_r}(r \cdot m) = \sum_{t=0}^{r \cdot m} H_{I_r}(t) = \sum_{s=0}^{m} H_{I_r}(r \cdot s) = \sum_{s=0}^{m} H(s) = C(m) \ .$$

Soit n le nombre de pixels. La fonction f_r égalisant l'histogramme H_{I_r} est donnée par

$$f_r(r \cdot m) = 255\, C_{I_r}(r \cdot m)/n = 255\, C(m)/n \ .$$

De même $C_{I_v}(v \cdot m) = C(m)$ et $C_{I_b}(b \cdot m) = C(m)$, tandis que les fonctions f_v et f_b égalisant les histogrammes H_{I_v} et H_{I_b} donnent $f_v(v \cdot m) = 255\, C(m)/n$ et $f_b(b \cdot m) = 255\, C(m)/n$. Donc les pics de hauteur $H(m)$ positionnés aux abcisses $r \cdot m$, $v \cdot m$ et $b \cdot m$ (dans H_{I_r}, H_{I_v} et H_{I_b}) se positionneront sur l'abcisse $255\, C(m)/n$ (dans les histogrammes égalisés). En d'autres termes, l'égalisation des histogrammes H_{I_r}, H_{I_v} et H_{I_b} donne la même chose que celle de H. Nous l'illustrons sur la figure.

Du point de vue intuitif, l'égalisation d'histogramme positionne les pics de l'histogramme, non pas en fonction de leurs positions initiales, mais de leurs hauteurs, chaque pic obtenant sur sa gauche un écart proportionnel à sa hauteur. Donc, comme H_{I_r}, H_{I_v} et H_{I_b} ont la même séquence de pics (à des positions différentes), l'égalisation d'histogramme donnera la même chose sur les trois.

Q3. Un pixel p ayant dans I la couleur $\big(r \cdot n_p, v \cdot n_p, b \cdot n_p\big)$, aura dans J la couleur

$$\big(f_r(r \cdot n_p), f_v(v \cdot n_p), f_b(b \cdot n_p)\big) = \big(255\, C(n_p)/n, 255\, C(n_p)/n, 255\, C(n_p)/n\big) \ ,$$

donc J est une image à niveaux de gris.

NB. Si $r = 0$, l'image I_r est constante 0, donc H_r a un pic unique d'abcisse 0, et l'égalisation d'histogramme donne $f_r(0) = 255$, donc l'image J_r est constante 255. Ici J ne sera plus une image à niveaux de gris, mais de teinte et saturation constantes. Même remarque si $v = 0$ ou $b = 0$.

(2) Erosion d'images label

Pour un pixel p et pour $t = 1, \ldots, 254$, on a

$$\begin{aligned} (I \ominus B)(p) = t &\iff p \in (I \ominus B)_t = I_t \ominus B \iff B_p \subseteq I_t \\ &\iff \forall\, b \in B,\ b + p \in I_t \iff \forall\, b \in B,\ I(b+p) = t \ . \end{aligned}$$

Q1. Pour un pixel p, on a $I(p) = 0$ ssi pour tout $t = 1, \ldots, 254$ on a $I(p) \neq t$, c.-à-d. $p \notin I_t$. Donc

$$\{p \in E \mid I(p) = 0\} = E \setminus \Big(\bigcup_{t=0}^{254} I_t\Big) \ .$$

Q2. $p \in (I \ominus B)_s \cap (I \ominus B)_t$ signifie que $p \in I_s \ominus B$ et $p \in I_t \ominus B$, c.-à-d. prenant $b \in B$ (c'est possible, $B \neq \emptyset$), on a à la fois $I(b+p) = s$ et $I(b+p) = t$, une contradiction. Donc $(I \ominus B)_s \cap (I \ominus B)_t = \emptyset$.

Q3. Le support de I est

$$\{p \in E \mid I(p) \neq 0\} = \bigcup_{t=0}^{254} \{p \in E \mid I(p) = t\} = \bigcup_{t=0}^{254} I_t \ .$$

Comme le support de I est borné, chaque I_t ($t = 1, \ldots, 254$) est borné. L'érosion de I_t par B est une intersection de translatés de B ($I_t \ominus B = \bigcap_{b \in B} (I_t)_{-b}$), donc $I_t \ominus B$ est bornée. En fait, on peut montrer que si les rectangles englobant I_t et B sont de dimensions $H \times V$ et $h \times v$, alors les dimensions du rectangle englobant $I_t \ominus B$ sont $(H - h + 1) \times (V - v + 1)$. Comme $I_t \ominus B = (I \ominus B)_t$ est bornée ($t = 1, \ldots, 254$),

$$\{p \in E \mid (I \ominus B)(p) \neq 0\} = \bigcup_{t=0}^{254} \{p \in E \mid (I \ominus B)(p) = t\} = \bigcup_{t=0}^{254} (I \ominus B)_t$$

est bornée. Donc $I \ominus B$ est de support borné.

Q4. Pour un pixel p et pour $t = 1, \ldots, 254$, on a

$$(I \ominus B)(p) = t \iff \forall\, b \in B,\ I(b + p) = t \ ,$$

et

$$(I \ominus B)(p) = 0 \iff \forall\, t = 1, \ldots, 254,\ (I \ominus B)(p) \neq t \ .$$

Notons que les pixels $b + p$, $b \in B$, sont ceux de B_p. Donc on obtient :

— si pour un t parmi $1, \ldots, 254$ on a $I(q) = t$ pour tout $q \in B_p$, alors on pose $(I \ominus B)(p) = t$;

— sinon (c.-à-d. s'il existe $q \in B_p$ avec $I(q) = 0$, ou s'il existe $q, q' \in B_p$ avec $I(q) = s$ et $I(q') = t$ pour $1 \leq s < t \leq 254$), on pose $(I \ominus B)(p) = 0$.

Ici la fenêtre $W(p)$ associée à p est B_p.

(3) Filtre de Kramer et Bruckner

Soient I l'image de départ, et pour tout pixel p, $W(p)$ la fenêtre associée à p,

$$\max_p = \max\{I(q) \mid q \in W(p)\} \quad \text{et} \quad \min_p = \min\{I(q) \mid q \in W(p)\} \ .$$

Alors l'image filtrée J est donnée par $J(p) = \max_p$ si $I(p) \geq (\max_p + \min_p)/2$ et $J(p) = \min_p$ si $I(p) < (\max_p + \min_p)/2$. En supposant $p \in W(p)$, on a toujours $\min_p \leq I(p) \leq \max_p$. L'image I est ternaire. Pour un pixel p on a trois cas :

(i) $\max_p = \min_p$, c.-à-d. tous les pixels $q \in W(p)$ ont la même valeur, $I(q) = I(p)$. Donc $J(p) = \max_p = \min_p = I(p)$.

(ii) $\min_p < \max_p = I(p)$. Donc $J(p) = \max_p = I(p)$.

(ii) $I(p) = \min_p < \max_p$. Donc $J(p) = \min_p = I(p)$.

(ii) $\min_p < I(p) < \max_p$. Comme I est ternaire, cela signifie que $I(p) = 1$, $\min_p = 0$ et $\max_p = 2$. Ici on obtient $J(p) = \max_p = 2$.

Par conséquent, on a $J(p) = I(p)$, sauf si $I(p) = 1$, $\min_p = 0$ et $\max_p = 2$, dans lequel cas on obtient $J(p) = 2$. Le seul effet du filtre est de monter certaines valeurs de pixels de 1 à 2, dans le cas où ce 1 côtoie des 0 et 2 dans sa fenêtre.

En répétant le filtre, on aboutit à une image K où tout pixel p de niveau 1 a sa fenêtre $W(p)$ ne pouvant pas contenir simultanément un pixel de niveau 0 et un autre de niveau 2 :

$$K(p) = 1 \implies \big[\forall\, q \in W(p),\ K(q) \neq 2\big] \quad \text{ou} \quad \big[\forall\, q \in W(p),\ K(q) \neq 0\big] \ .$$

Visuellement parlant, toute zone de niveau 1 doit être suffisamment large pour ne pas être "chevauchée" par une fenêtre joignant une zone de niveau 0 et une de niveau 2.