Université Louis Pasteur
UFR de Mathématique et Informatique

Session de Juin 2001
Licence et Maîtrise d'informatique

Traitement d'Images

Corrigé
par : Prof. Christian RONSE

Dans ce qui suit, pour $X \subseteq \mathbb{Z}^2$, X^c désigne le complémentaire de X dans $\mathbb{Z}^2$, c.à.d. $X^c = \mathbb{Z}^2 \setminus X$.

(1) Opérateur bouche-trous *(9,5 points)*
Etant donnée une figure bornée F dans $\mathbb{Z}^2$, soit $\eta_k(F)$ la composante k'-connexe non bornée de F^c, et posons $\beta_k(F) = \left[\eta_k(F)\right]^c$. Donc $\beta_k(F)$ contient tout $\mathbb{Z}^2$ sauf la composante k'-connexe non bornée du complémentaire F^c de F, c.à.d. $\beta_k(F)$ contient F et les composantes bornées de F^c, qu'on appelle aussi trous. Comme β_k rajoute à F ses trous, il est appelé opérateur "bouche-trous".

(i) *(1,5 point)* Le complémentaire $\left[\beta_k(F)\right]^c$ de $\beta_k(F)$ est $\eta_k(F)$, qui est k'-connexe, ainsi $\eta_k(F)$ est l'unique composante k'-connexe de $\left[\beta_k(F)\right]^c$, et elle et non bornée. Donc $\eta_k(\beta_k(F)) = \eta_k(F)$.

(ii) *(2 points)* Dans l'arborescence d'adjacence de F, la racine est $\eta_k(F)$ (l'unique composante k'-connexe non bornée de F^c), et les sommets fils de celle-ci sont les m composantes k-connexes $F_1, \ldots, F_m$ de F adjacentes à $\eta_k(F)$ (les composantes "extérieures" de F, qui ne sont pas entourées par d'autres composantes de F). Pour $i = 1, \ldots, m$, un sommet de l'arborescence descendant de F_i correspond à une composante connexe A de F ou de F^c qui est entourée par F_i ; tout 4-chemin allant de A vers $\eta_k(F)$ doit traverser F_i avant d'atteindre $\eta_k(F)$, donc la partie du 4-chemin avant $\eta_k(F)$ est totalement incluse dans $\left[\eta_k(F)\right]^c = \beta_k(F)$ et intersecte F_i ; par conséquent A est dans la même composante k-connexe de $\beta_k(F)$ que F_i.

Comme $\eta_k(F)$ est l'unique composante k'-connexe de $\left[\beta_k(F)\right]^c$, il s'ensuit que l'arborescence d'adjacence de $\beta_k(F)$ aura pour racine $\eta_k(F)$, et les autres sommets seront les m fils $F'_1, \ldots, F'_m$, qui sont les m composantes k-connexes de $\beta_k(F)$; chaque F'_i sera l'union de F_i et des composantes de F et de F^c correspondant aux sommets descendants de F_i dans l'arborescence de F. Nous illustrons cela en annexe.

(iii) *(1,5 point)* Soit R un rectangle contenant F. Le complémentaire R^c de R est inclus dans le complémentaire F^c de F ; de plus R^c est 8-connexe et non borné, donc il est inclus dans la composante k'-connexe non bornée de F, c.à.d. $R^c \subseteq \eta_k(F)$. On en déduit que

$$\beta_k(F) = \left[\eta_k(F)\right]^c \subseteq \left[R^c\right]^c = R \ ,$$

donc R contient $\beta_k(F)$. Réciproquement, comme $F \subseteq \beta_k(F)$, tout rectangle contenant $\beta_k(F)$ doit contenir F. Par conséquent F et $\beta_k(F)$ sont tous deux contenus dans les mêmes rectangles, donc bornés par le même rectangle (le plus petit rectangle les contenant).

(iv) *(1,5 point)* On a vu en *(i)* que $\eta_k(\beta_k(F)) = \eta_k(F)$. On obtient donc

$$\beta_k(\beta_k(F)) = \left[\eta_k(\beta_k(F))\right]^c = \left[\eta_k(F)\right]^c = \beta_k(F) \ .$$

Donc l'opérateur "bouche-trous" est idempotent : quand on a bouché tous les trous, il n'y a plus rien à boucher.

(iv) *(3 points)* Soit $P \subseteq F$. On a $\eta_k(F) \subseteq F^c \subseteq P^c$, et comme $\eta_k(F)$ est k'-connexe et non bornée, elle doit être incluse dans la composante k'-connexe non bornée de P^c, c.à.d. $\eta_k(F) \subseteq \eta_k(P)$. On en déduit que

$$\beta_k(P) = \left[\eta_k(P)\right]^c \subseteq \left[\eta_k(F)\right]^c = \beta_k(F),$$

donc β_k est croissant. Une façon plus intuitive (mais moins rigoureuse) d'expliquer ce résultat est que les trous de P, étant entourés par P, le seront aussi par F, donc ils sont formés de pixels de F et de ses trous, donc les trous de P sont inclus dans $\beta_k(F)$.

Pour finir : l'opérateur β_k est croissant, idempotent et extensif, et il est facile de voir qu'il est aussi invariant par translations. C'est donc un exemple de fermeture algébrique invariante par translations.

(2) Correction de contraste *(2,5 points)*

Dans toutes les bonnes familles, il est recommandé de jouer avec XV (et de lire les annales) avant de présenter l'examen de TI. Sur chacune des deux images, on sélectionne des zones rectangulaires dans les zones d'intérêt (cheveux, visage, fond, etc.), et on y mesure les niveaux de gris moyens, qu'on note. On obtient donc dans l'image i ($i = 1$ pour la bonne, $i = 2$ pour la mauvaise) les mesures de niveaux de gris c_i pour les cheveux, v_i pour le visage, f_i pour le fond, etc. Supposons par exemple

$$0 < c_i < f_i < v_i < 255$$

(c.à.d. ce n'est pas une blonde). Sur l'image 2 on fait une transformation de niveaux de gris linéaire par morceaux $0 \mapsto 0$, $c_2 \mapsto c_1$, $f_2 \mapsto f_1$, $v_2 \mapsto v_1$, $255 \mapsto 255$, avec interpolation linéaire entre ces points de contrôle.

NB. Pour ceux qui veulent absolument répondre à côté, si les deux images ont *exactement* les mêmes proportions de cheveux, visage, fond, etc., alors on peut appliquer à l'image 2 une spécification d'histogramme dont l'histogramme spécifié est celui de l'image 1.

(3) Restauration de niveaux de gris sous-quantifiés *(7 points)*

Un opérateur approprié pour diminuer l'effet de faux contours est le lissage linéaire : on remplace en parallèle le niveau de gris de chaque pixels par la moyenne pondérée des niveaux de gris des pixels d'une fenêtre $n \times n$ (n impair > 1) centrée en ce pixel, les coefficients de pondération étant donnés par un masque symétrique $n \times n$. Si on applique un tel lissage partout, on fait un traitement "aveugle", et pour rendre un tel traitement plus "intelligent" on peut limiter les pixels sur lesquels on fait le lissage, et si on lisse quand même, il faudra le faire de façon "adaptative", en ne prenant en compte dans la moyenne pondérée que les pixels voisins qui ne sont pas séparés du pixel de référence par ce qui est détecté comme un "vrai contour". Les indices donnés dans l'énoncé pour un "vrai contour" sont :

- *(i)* les variations de niveaux de gris de plus de 16 ;
- *(ii)* les bords d'une région (c.à.d. composante connexe à niveaux de gris constant) ayant une petite taille.

Pour détecter les régions et mesurer leur taille, on peut appliquer l'algorithme suivant, utilisant une file f et un compteur c. Initialement, les pixels n'ont pas d'étiquette, mais à la fin chaque pixel aura l'étiquette de sa région, et à chaque étiquette de région sera associée un entier qui donne sa taille. On fait un balayage de l'image. Chaque fois qu'on arrive sur un pixel p non étiqueté, on crée une nouvelle étiquette e, qu'on associe à p, et on initialise la file f avec p dedans, et le compteur c est mis à 1. On répète ce qui suit jusqu'à ce que la file soit vide : on sort le premier pixel q de la file, et pour chaque pixel r voisin de q, ayant le même niveau de gris que q ($I_2(r) = I_2(q)$), mais non étiqueté, on associe l'étiquette e à r, on incrémente c de 1, et on met r dans la file. Quand la file est vide, on associe la taille c à l'étiquette e.

Pour faire le lissage "adaptatif", comme ce lissage se fait en parallèle, on crée une nouvelle image I_3. On définit un seuil s de taille de région. Ensuite pour chaque pixel p, on fait ce qui suit :

— Si la taille associée à l'étiquette de la région de p est inférieure au seuil s, alors $I_3(p) = I_2(p)$ (pas de lissage).

— Sinon, dans le voisinage $n \times n$ de p, on détermine l'ensemble $W(p)$ des pixels q de ce voisinage tels que $|I_2(p) - I_2(q)| \leq 16$. A chacun de ces pixels q correspond un coefficient pour la moyenne pondérée, qui est donné par le masque, à savoir $M(q-p)$. On pose alors :

$$I_3(p) = \frac{\sum_{q \in W(p)} M(q-p) I(q)}{\sum_{q \in W(p)} M(q-p)} \quad .$$

En d'autres termes on fait le lissage sur p par moyenne pondérée des niveaux de gris de ses voisins (en $n \times n$), dont on a exclu tous ceux dont le niveau de gris diffère de celui de p de plus de 16, parce que ces pixels-là sont supposés être séparés de p par un vrai contour qu'il ne faut pas lisser.

Ce qui est donné ici n'est qu'une suggestion, d'autres méthodes sont possibles. Voir en particulier P. Soille, *Morphological Image Analysis: Principles and Applications*, Springer Verlag, 1999, pp. 187–190 : au lieu d'opérer un lissage linéaire, on y interpole les niveaux de gris dans une région au moyen des transformées de distances par rapport aux régions voisines.

(4) Morphologie ensembliste *(4 points)*

Sœur Anne, ne voilà-t-il pas une variante de la question 3 de l'examen de juin 1997 ? Soient A et B les éléments structurants suivants :

— A forme un rectangle haut de 3 pixels et large de 5, centré en l'origine ;

— B est constitué de 4 pixels, les 2 juste au-dessus des coins supérieurs gauche et droit de A, et les 2 juste en-dessous des coins inférieurs gauche et droit de A.

L'énoncé consiste à construire la réunion des ensembles R tels que $R \subseteq F$, et $R = A_p$ pour un certain $p \in \mathbb{Z}^2$, avec $B_p \subseteq F^c$. Donc

$$X = \bigcup \{ A_p \mid p \in \mathbb{Z}^2,\ A_p \subseteq F, B_p \subseteq F^c \} \quad .$$

La transformée en tout ou rien par (A, B) donne

$$F \circledast (A,B) = \{ p \mid p \in \mathbb{Z}^2,\ A_p \subseteq F, B_p \subseteq F^c \} \quad .$$

Donc par dilatation par A on trouve

$$[F \circledast (A,B)] \oplus A = \bigcup \{ A_p \mid p \in X \circledast (A,B) \} = \bigcup \{ A_p \mid p \in \mathbb{Z}^2,\ A_p \subseteq F, B_p \subseteq F^c \} \quad .$$

L'ensemble recherché est $[F \circledast (A,B)] \oplus A$.

NB. Les profs veulent se faire plaisir, même pendant les examens. Pour deux éléments structurants disjoints A et B, l'opération $F \mapsto [F \circledast (A,B)] \oplus A$ est idempotente et a certaines analogies avec l'ouverture (voir mon article de 1996 dans JVCIR).

(5) Dualité en morphologie ensembliste *(2 points)*

C'est exactement la question 3 de l'examen de septembre 1997 (et la question 5 de celui de juin 1996). (Je vous ai déjà dit que dans les bonnes familles on lit les annales et on joue avec XV). Le dual ψ^* d'un opérateur ensembliste ψ donne ce qui se passe sur le complémentaire quand on applique l'opérateur sur un ensemble. En d'autres termes $\psi^*(X^c) = \psi(X)^c$, d'où $\psi^*(X) = \left[\psi(X^c)\right]^c$.

(a) On a $X \setminus (X \circ B) = X \cap (X \circ B)^c$, donc le dual donne

$$\left[X^c \cap (X^c \circ B)^c\right]^c = X \cup (X^c \circ B) = X \cup (X \bullet \check{B})^c \quad .$$

(b) On a $(X \bullet B) \setminus X = (X \bullet B) \cap X^c$, donc le dual donne

$$\left[(X^c \bullet B) \cap X\right]^c = (X^c \bullet B)^c \cup X^c = (X \circ \check{B}) \cup X^c \quad .$$