AIDE-MEMOIRE DE MORPHOLOGIE PLATE

Christian RONSE, LSIIT UMR 7005 CNRS-ULP, Département d'Informatique de l'ULP

Les images à niveaux de gris sont considérées comme des fonctions $E \to \mathcal{T}$, où $E = \mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{Z}^d$ représente l'espace des points et $\mathcal{T}$ est l'ensemble des niveaux de gris; $\mathcal{T}$ est une partie fermée de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, par exemple: $\mathcal{T} = \overline{\mathbb{R}}$, $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{+\infty, -\infty\}$, $[a, b]$ ($a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a < b$), ou $[a \dots b] = [a, b] \cap \overline{\mathbb{Z}}$. L'ensemble des fonctions $E \to \mathcal{T}$ est écrit $\mathcal{T}^E$; cet ensemble est ordonné par la relation $\leq$, où $F_1 \leq F_2$ signifie que pour tout $p \in E$ on a $F_1(p) \leq F_2(p)$. Pour une famille F_i, $i \in \mathcal{I}$ de fonctions, on définit l'*enveloppe supérieure* $\bigvee_{i \in \mathcal{I}} F_i$ et l'*enveloppe inférieure* $\bigwedge_{i \in \mathcal{I}} F_i$ comme suit:

$$\Big(\bigvee_{i \in \mathcal{I}} F_i\Big)(p) = \sup_{i \in \mathcal{I}} F_i(p) \qquad \text{et} \qquad \Big(\bigwedge_{i \in \mathcal{I}} F_i\Big)(p) = \inf_{i \in \mathcal{I}} F_i(p).$$

Les éléments structurants sont ici des parties de E.

Pour un niveau de gris $t \in \mathcal{T}$ et une fonction $F \in \mathcal{T}^E$, nous définissons la *section* $X_t(F)$ par

$$X_t(F) = \{p \in E \mid F(p) \geq t\}.$$

Toute image $F \in \mathcal{T}^E$ est caractérisée par l'ensemble de ses sections $X_t(F)$ pour $t \in \mathcal{T}$: pour tout $p \in E$ on a

$$F(p) = \sup \{t \in \mathcal{T} \mid p \in X_t(F)\}.$$

Notons que pour $t < t'$ on a $X_{t'}(F) \subseteq X_t(F)$, et pour $F \leq G$ on a $X_t(F) \subseteq X_t(G)$.

Soit $\psi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ une transformation *croissante* d'ensembles. On en dérive $\Psi : \mathcal{T}^E \to \mathcal{T}^E$, une transformation croissante d'images à niveaux de gris, définie comme suit: pour $F \in \mathcal{T}^E$ et $p \in E$ on a

$$\Psi(F)(p) = \sup \{t \in \mathcal{T} \mid p \in \psi(X_t(F))\}.$$

En termes intuitifs, on découpe F en "tranches" $X_t(F)$, on applique l'opérateur ψ à chacune des "tranches"' $X_t(F)$, puis on "empile" les tranches $\psi(X_t(F))$. On appelle Ψ *l'opérateur plat dérivé de* ψ.

Si $\psi(\emptyset) \neq \emptyset$, alors pour tout point $p \in \psi(\emptyset)$ et toute fonction $F \in \mathcal{T}^E$ on a toujours $\Psi(F)(p) = \max \mathcal{T}$ (le niveau de gris maximum dans $\mathcal{T}$); si $\psi(E) \neq E$, alors pour tout point $p \in E \setminus \psi(E)$ et toute fonction $F \in \mathcal{T}^E$ on a toujours $\Psi(F)(p) = \min \mathcal{T}$ (le niveau de gris minimum dans $\mathcal{T}$). On choisit donc généralement ψ tel que $\psi(\emptyset) = \emptyset$ et $\psi(E) = E$. Nous appelons cette contrainte la *condition de stabilité*; quand elle est satisfaite, on a la propriété suivante: l'opérateur plat Ψ préserve les plages de niveaux de gris; de façon plus formelle:

— Soit $\mathcal{G}$ une partie fermée de $\mathcal{T}$ et $F \in \mathcal{T}^E$ telle que pour tout $p \in E$ l'on a $F(p) \in \mathcal{G}$; alors pour tout $p \in E$ l'on a $\Psi(F)(p) \in \mathcal{G}$.

Une autre propriété vérifiée sous réserve de la condition de stabilité est l'invariance par transformation strictement croissante et continue de contraste:

— Soit $f : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ strictement croissante et continue, et soit $C_f : \mathcal{T}^E \to \mathcal{T}^E$ l'opération de contraste définie par $C_f(F)(p) = f(F(p))$ pour $F \in \mathcal{T}^E$ et $p \in E$; alors Ψ commute avec C_f: pour $F \in \mathcal{T}^E$ on a $\Psi(C_f(F)) = C_f(\Psi(F))$.

Par exemple Ψ commute avec une transformation linéaire strictement croissante des niveaux de gris: pour $a, b \in \mathcal{T}$ avec $a > 0$, $\Psi(aF + b) = a\Psi(F) + b$.

Notons $\psi \to \Psi$ l'opération dérivant l'opérateur plat Ψ de l'opérateur ensembliste ψ. Cette dérivation a les propriétés suivantes:

Si $\psi_1 \to \Psi_1$ et $\psi_2 \to \Psi_2$, alors $\psi_1\psi_2 \to \Psi_1\Psi_2$.

Si $\psi_i \to \Psi_i$ pour $i \in \mathcal{I}$, alors $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} \psi_i \to \bigvee_{i\in\mathcal{I}} \Psi_i$ et $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \psi_i \to \bigwedge_{i\in\mathcal{I}} \Psi_i$.

Quand ψ est la dilatation ou l'érosion (ensembliste) par un élément structurant $B \subseteq E$, on trouve pour Ψ les formules suivantes de dilatation et érosion par B d'images à niveaux de gris: pour $F \in \mathcal{T}^E$ on a

$$F \oplus B = \sup_{b\in B} F_b \qquad \text{et} \qquad F \ominus B = \inf_{b\in B} F_{-b},$$

donc pour $p \in E$ on a

$$(F \oplus B)(p) = \sup_{x\in(\check{B})_p} F(x) = \sup_{b\in B} F(p-b) \qquad \text{et} \qquad (F \ominus B)(p) = \inf_{x\in B_p} F(x) = \inf_{b\in B} F(p+b).$$

Ici la condition de stabilité devient $B \neq \emptyset$.

On peut généralement définir une inversion de niveaux de gris, en d'autres termes une bijection inv de $\mathcal{T}$ qui inverse l'ordre; par exemple pour $\mathcal{T} = \overline{\mathbb{R}}$ ou $\overline{\mathbb{Z}}$ on prendra $inv : \mathcal{T} \to \mathcal{T} : t \mapsto -t$, tandis que pour $\mathcal{T} = [a, b]$ ou $[a \ldots b]$, on prendra $inv : \mathcal{T} \to \mathcal{T} : t \mapsto a+b-t$. Cette inversion s'étend aux fonctions en posant $inv(F)(p) = inv(F(p))$. Dans ce cas la dualité par complémentation pour les opérateurs ensemblistes se traduit en *dualité par inversion de niveaux de gris* pour les opérateurs plats. Soient $\psi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ et $\Psi : \mathcal{T}^E \to \mathcal{T}^E$; on définit $\psi^* : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ et $\Psi^* : \mathcal{T}^E \to \mathcal{T}^E$ comme suit:

$$\psi^*(X) = \big[\psi(X^c)\big]^c \qquad \text{et} \qquad \Psi^*(F) = inv\big(\psi[inv(F)]\big).$$

Supposant ψ croissant, on a que si $\psi \to \Psi$, alors $\psi^* \to \Psi^*$.

Dans le cas des niveaux de gris discrets, par exemple $\mathcal{T} = \overline{\mathbb{Z}}$ ou $[a \ldots b]$, on a des propriétés supplémentaires. Premièrement,

$$\forall t \in \mathcal{T},\ \forall F \in \mathcal{T}^E, \quad X_t(\Psi(F)) = \psi(X_t(F)).$$

Deuxièmement, si la condition de stabilité est vérifiée, alors Ψ est invariante par transformation croissante de contraste:

— Soient $f : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ croissante et $C_f : \mathcal{T}^E \to \mathcal{T}^E$ l'opération de contraste définie par $C_f(F)(p) = f(F(p))$ pour $F \in \mathcal{T}^E$ et $p \in E$; alors Ψ commute avec C_f: pour $F \in \mathcal{T}^E$ on a $\Psi(C_f(F)) = C_f(\Psi(F))$.

Supposons en particulier que $\mathcal{T} = [a \ldots b]$ pour $a, b \in \mathbb{Z}$ ($a < b$). Pour $t \in \mathcal{T}$et $F \in \mathcal{T}^E$, soit $\xi_t(F)$ la fonction caractéristique de $X_t(F)$, c.à.d. pour $p \in E$ l'on a:

$$\xi_t(F)(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } F(p) \geq t, \\ 0 & \text{si } F(p) < t. \end{cases}$$

Alors

$$F = a + \sum_{t=a+1}^{b} \xi_t(F),$$

et pour tout opérateur plat on a

$$\xi_t(\Psi(F)) = \Psi(\xi_t(F)).$$

On en déduit que

$$\Psi(F) = a + \sum_{t=a+1}^{b} \xi_t(\Psi(F)) = a + \sum_{t=a+1}^{b} \Psi(\xi_t(F)).$$