AIDE-MEMOIRE DE FORMULES D'ANALYSE DE FOURIER

Christian RONSE, LSIIT UMR 7005 CNRS-ULP, Département d'Informatique de l'ULP

Pour $u \in \mathbb{C}$, $\overline{u}$ désigne le complexe conjugué de u. On écrit $\mathbf{x}$ pour le vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$, où n est la dimension de l'espace E de définition des fonctions. On a quatre cas d'espace, tous à n dimensions :

— *non échantillonné non périodique* : $E = \mathbb{R}^n$.

— *échantillonné non périodique* : $E = \prod_{i=1}^n \Delta_i \mathbb{Z}$, où Δ_i est le pas d'échantillonnage selon l'axe i ($\Delta_i > 0$). On pose ici $\Delta = \prod_{i=1}^n \Delta_i$.

— *non échantillonné périodique* : $E = \prod_{i=1}^n \mathbb{R}/T_i\mathbb{Z}$, où T_i est la période selon l'axe i ($T_i > 0$); on peut identifier le quotient $\mathbb{R}/T_i\mathbb{Z}$ (ensemble des réels modulo T_i) avec l'intervale $[0, T_i[$. On pose ici $T = \prod_{i=1}^n T_i$.

— *échantillonné périodique* : $E = \prod_{i=1}^n \Delta_i\mathbb{Z}/N_i\Delta_i\mathbb{Z}$, où Δ_i est le pas d'échantillonnage et $N_i\Delta_i$ la période selon l'axe i ($N_i \in \mathbb{N}^*$, la période devant être multiple du pas d'échantillonnage) ; on a un isomorphisme entre le quotient $(\Delta_i\mathbb{Z})/(N_i\Delta_i\mathbb{Z})$ (ensemble des multiples de Δ_i, modulo $N_i\Delta_i$) et le quotient $\mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z}$ (ensemble des entiers modulo N_i). On pose ici $\Delta = \prod_{i=1}^n \Delta_i$ et $N = \prod_{i=1}^n N_i$. Cet espace est fini, sa taille valant N.

CONVOLUTION ET CORRÉLATION

On les note respectivement $f * g$ et $f \circ g$. Elles sont définies comme suit selon le type d'espace :

— *non échantillonné non périodique* ($E = \mathbb{R}^n$) :

$$(f * g)(\mathbf{x}) = \int_E f(\mathbf{t})g(\mathbf{x} - \mathbf{t})d\mathbf{t} \qquad \text{et} \qquad (f \circ g)(\mathbf{x}) = \int_E \overline{f(\mathbf{t})}g(\mathbf{x} + \mathbf{t})d\mathbf{t}.$$

— *échantillonné non périodique* ($E = \prod_{i=1}^n \Delta_i\mathbb{Z}$) :

$$(f * g)(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{t} \in E} f(\mathbf{t})g(\mathbf{x} - \mathbf{t}) \qquad \text{et} \qquad (f \circ g)(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{t} \in E} \overline{f(\mathbf{t})}g(\mathbf{x} + \mathbf{t}).$$

— *non échantillonné périodique* ($E = \prod_{i=1}^n \mathbb{R}/T_i\mathbb{Z}$) :

$$(f * g)(\mathbf{x}) = \frac{1}{T}\int_E f(\mathbf{t})g(\mathbf{x} - \mathbf{t})d\mathbf{t} \qquad \text{et} \qquad (f \circ g)(\mathbf{x}) = \frac{1}{T}\int_E \overline{f(\mathbf{t})}g(\mathbf{x} + \mathbf{t})d\mathbf{t}.$$

— *échantillonné périodique* ($E = \prod_{i=1}^n \Delta_i\mathbb{Z}/N_i\Delta_i\mathbb{Z}$) :

$$(f * g)(\mathbf{x}) = \frac{1}{N\Delta}\sum_{\mathbf{t} \in E} f(\mathbf{t})g(\mathbf{x} - \mathbf{t}) \qquad \text{et} \qquad (f \circ g)(\mathbf{x}) = \frac{1}{N\Delta}\sum_{\mathbf{t} \in E} \overline{f(\mathbf{t})}g(\mathbf{x} + \mathbf{t}).$$

NB : ces deux sommes sont finies (elle ont N termes).

La convolution est bilinéaire, commutative, et associative (avec l'égalité presque partout). La corrélation est linéaire sur l'argument de droite et semi-linéaire sur l'argument de gauche ; au lieu de la commutativité, on a :

$$(f \circ g)(\mathbf{x}) = (\overline{g} \circ \overline{f})(-\mathbf{x}).$$

Pour une translation $\tau_\mathbf{h}$ par un vecteur $\mathbf{h}$, c.a.d. $\tau_\mathbf{h}(f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{h})$, on a

$$\tau_\mathbf{h}(f * g) = \tau_\mathbf{h}(f) * g = f * \tau_\mathbf{h}(g) \qquad \text{et} \qquad \tau_\mathbf{h}(f \circ g) = \tau_{-\mathbf{h}}(f) \circ g = f \circ \tau_\mathbf{h}(g).$$

En particulier $\tau_\mathbf{h}(f) \circ \tau_\mathbf{h}(g) = f \circ g$.

Une application directe du Lemme de Schwartz donne

$$|(f \circ g)(\mathbf{x})| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2,$$

où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme quadratique, et l'égalité est vérifiée si et seulement si $f(\mathbf{t}\,)$ est proportionnelle à $g(\mathbf{x}+\mathbf{t}\,)$ pour $\mathbf{t} \in E$ (presque partout).

TRANSFORMÉE DE FOURIER

Elle est définie sur certaines classes de fonctions. La transformée de Fourier de f est notée $\mathcal{F}(f)$. A nouveau la formule varie selon le type d'espace :

— *non échantillonné non périodique* ($E = \mathbb{R}^n$) : Pour f (absolument) intégrable, on a

$$\mathcal{F}(f)(\mathbf{u}) = \int_E f(\mathbf{t}\,)\, \exp[-2\pi i\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}]\, d\mathbf{t}.$$

Pour les fonctions non intégrables, on "extrapole". Ici $\mathcal{F}(f)$ sera aussi sur le même espace non échantillonné non périodique $E = \mathbb{R}^n$.

— *échantillonné non périodique* ($E = \prod_{i=1}^n \Delta_i \mathbb{Z}$) : Pour f (absolument) sommable, on a

$$\mathcal{F}(f)(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{t} \in E} f(\mathbf{t}\,)\, \exp[-2\pi i\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}].$$

Pour les fonctions non sommables, on "extrapole". Ici $\mathcal{F}(f)$ sera sur l'espace non échantillonné périodique $E' = \prod_{i=1}^n \mathbb{R}/\Delta_i^{-1}\mathbb{Z}$, avec la période $1/\Delta_i$ selon l'axe i.

— *non échantillonné périodique* ($E = \prod_{i=1}^n \mathbb{R}/T_i\mathbb{Z}$) : Pour f (absolument) intégrable, on a

$$\mathcal{F}(f)(\mathbf{u}) = \frac{1}{T} \int_E f(\mathbf{t}\,)\, \exp[-2\pi i\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}]\, d\mathbf{t}.$$

Pour les fonctions non intégrables, on "extrapole". Ici $\mathcal{F}(f)$ sera sur l'espace échantillonné non périodique $E' = \prod_{i=1}^n T_i^{-1}\mathbb{Z}$, avec le pas d'échantillonnage $1/T_i$ selon l'axe i.

— *échantillonné périodique* ($E = \prod_{i=1}^n \Delta_i\mathbb{Z}/N_i\Delta_i\mathbb{Z}$) :

$$\mathcal{F}(f)(\mathbf{u}) = \frac{1}{N\Delta} \sum_{\mathbf{t} \in E} f(\mathbf{t}\,)\, \exp[-2\pi i\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}].$$

NB : la somme est finie, elle a N termes. Ici $\mathcal{F}(f)$ sera sur l'espace échantillonné périodique $E' = \prod_{i=1}^n (N_i\Delta_i)^{-1}\mathbb{Z}/\Delta_i^{-1}\mathbb{Z}$, avec le pas d'échantillonnage $1/N_i\Delta_i$ et la période $1/\Delta_i$ selon l'axe i.

On a la formule d'inversion $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$ (presque partout) qui donne, suivant le type d'espace :

— *non échantillonné non périodique* ($E = \mathbb{R}^n$) :

$$f(\mathbf{t}\,) = \int_E \mathcal{F}(f)(\mathbf{u})\, \exp[+2\pi i\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}]\, d\mathbf{u}.$$

— *échantillonné non périodique* ($E = \prod_{i=1}^n \Delta_i\mathbb{Z}$) :

$$f(\mathbf{t}\,) = \Delta \int_{E'} \mathcal{F}(f)(\mathbf{u})\, \exp[+2\pi i\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}]\, d\mathbf{u}, \qquad \text{avec} \quad E' = \prod_{i=1}^n \mathbb{R}/\Delta_i^{-1}\mathbb{Z}.$$

— *non échantillonné périodique* ($E = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{R}/T_i\mathbb{Z}$) :

$$f(\mathbf{t}\,) = \sum_{\mathbf{u}\in E'} \mathcal{F}(f)(\mathbf{u})\; \exp[+2\pi i\, \mathbf{u}\cdot\mathbf{t}], \qquad \text{avec} \quad E' = \prod_{i=1}^{n} T_i^{-1}\mathbb{Z}.$$

— *échantillonné périodique* ($E = \prod_{i=1}^{n} \Delta_i\mathbb{Z}/N_i\Delta_i\mathbb{Z}$) :

$$f(\mathbf{t}\,) = \Delta \sum_{\mathbf{u}\in E'} \mathcal{F}(f)(\mathbf{u})\; \exp[+2\pi i\, \mathbf{u}\cdot\mathbf{t}], \qquad \text{avec} \quad E' = \prod_{i=1}^{n} (N_i\Delta_i)^{-1}\mathbb{Z}/\Delta_i^{-1}\mathbb{Z}.$$

A nouveau, la somme a N termes.

La transformée de Fourier est une opération linéaire, et elle préserve la norme quadratique. On a les équations suivantes sur sa relation avec diverses opérations sur les fonctions :

$$\begin{aligned}
g(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x}) &\implies \mathcal{F}(g)(\mathbf{u}) = \mathcal{F}(f)(-\mathbf{u}),\\
g(\mathbf{x}) = \overline{f(\mathbf{x})} &\implies \mathcal{F}(g)(\mathbf{u}) = \overline{\mathcal{F}(f)(-\mathbf{u})},\\
g(\mathbf{x}) = \overline{f(-\mathbf{x})} &\implies \mathcal{F}(g)(\mathbf{u}) = \overline{\mathcal{F}(f)(\mathbf{u})},\\
g(x_1,\ldots,x_n) = f(x_1/a_1,\ldots,x_n/a_n) &\implies \mathcal{F}(g)(u_1,\ldots,u_n) = |a_1|\cdots|a_n|\mathcal{F}(f)(a_1u_1,\ldots,a_nu_n),\\
f(\mathbf{x}) = g(x_1,\ldots,x_m)h(x_{m+1},\ldots,x_n) &\implies \mathcal{F}(f)(\mathbf{u}) = \mathcal{F}(g)(u_1,\ldots,u_m)\mathcal{F}(h)(u_{m+1},\ldots,u_n).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}-\mathbf{h}) &\implies \mathcal{F}(g)(\mathbf{u}) = \exp[-2\pi i\,\mathbf{h}\cdot\mathbf{u}\,]\,\mathcal{F}(f)(\mathbf{u}),\\
g(\mathbf{x}) = \exp[2\pi i\,\mathbf{h}\cdot\mathbf{x}\,]\,f(\mathbf{x}) &\implies \mathcal{F}(g)(\mathbf{u}) = \mathcal{F}(f)(\mathbf{u}-\mathbf{h}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g = \partial f/\partial x_j &\implies \mathcal{F}(g)(\mathbf{u}) = 2\pi i\, u_j\,\mathcal{F}(f)(\mathbf{u}),\\
g(\mathbf{x}) = -2\pi i\, x_j\, f(\mathbf{x}) &\implies \mathcal{F}(g) = \partial\mathcal{F}(f)/\partial u_j.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f * g) &= \mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g),\\
\mathcal{F}(f \cdot g) &= \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g),\\
\mathcal{F}(f \circ g) &= \overline{\mathcal{F}(f)}\cdot\mathcal{F}(g).
\end{aligned}$$

En particulier $\mathcal{F}(f\circ f) = |\mathcal{F}(f)|^2$: l'autocorrélation d'une fonction correspond au carré de la valeur absolue de la transformée de Fourier de cette fonction.

Pour les fonctions sur $\mathbb{R}^n$, la transformée de Fourier commute avec la rotation, on a la formule de multiplication $\int_E \mathcal{F}(f)\cdot g = \int_E f\cdot\mathcal{F}(g)$, et la formule de Poisson :

$$\sum_{\mathbf{z}\in\mathbb{Z}^n} f(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{z}\in\mathbb{Z}^n} \mathcal{F}(f)(\mathbf{z}).$$

On définit l'*amplitude* et la *phase* de Fourier, $\mathcal{A}(f)$ et $\Phi(f)$, comme suit :

$$\mathcal{A}(f)(\mathbf{u}) = |\mathcal{F}(f)(\mathbf{u})| \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}(f)(\mathbf{u}) = \mathcal{A}(f)(\mathbf{u})\cdot\exp[i\Phi(f)(\mathbf{u})]$$

L'amplitude de Fourier est à valeurs réelles non-négatives, tandis que la phase de Fourier est à valeurs réelles modulo 2π. Pour f **à valeurs réelles**, on a $\mathcal{F}(f)(-\mathbf{u}) = \overline{\mathcal{F}(f)(\mathbf{u})}$, et alors :

$$\mathcal{A}(f)(-\mathbf{u}) = \mathcal{A}(f)(\mathbf{u}) \qquad \text{et} \qquad \Phi(f)(-\mathbf{u}) = -\Phi(f)(\mathbf{u}).$$

La transformée de Fourier de l'impulsion de Dirac δ est la fonction constante 1. Ecrivons $\delta_{\mathbf{h}}$ pour $\tau_{\mathbf{h}}(\delta)$, une impulsion au point $\mathbf{h}$; on a alors

$$\mathcal{F}(\delta_{\mathbf{h}})(\mathbf{u}) = \exp[-2\pi i\,\mathbf{h}\cdot\mathbf{u}\,].$$

Le peigne de Dirac

$$\sum_{\mathbf{z}\in\mathbb{Z}^n} \delta_{\mathbf{z}}$$

est sa propre transformée de Fourier (c'est une conséquence de la formule de Poisson). Si on prend un peigne suivant des pas différents selon les axes,

$$\sum_{\mathbf{z}\in E} \delta_{\mathbf{z}}, \qquad \text{où} \quad E = \prod_{i=1}^{n} \Delta_i \mathbb{Z},$$

sa transformée de Fourier sera

$$\frac{1}{\Delta}\sum_{\mathbf{v}\in E^*} \delta_{\mathbf{v}}, \qquad \text{où} \quad E^* = \prod_{i=1}^{n} \Delta_i^{-1} \mathbb{Z}.$$

ECHANTILLONNAGE ET PÉRIODISATION

Etant donnée une fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$, l'*échantillonnage* de f donne une fonction f_e définie sur $E = \prod_{i=1}^n \Delta_i\mathbb{Z}$, telle que $f_e(\mathbf{t}\,) = f(\mathbf{t}\,)$ pour tout $\mathbf{t} \in \prod_{i=1}^n \Delta_i\mathbb{Z}$. On peut considérer f_e comme un train d'impulsions chacune de hauteur correspondant à la valeur de l'échantillon, donc on peut écrire:

$$f_e = \sum_{\mathbf{z}\in E} f(\mathbf{z})\delta_{\mathbf{z}} = f\cdot\sum_{\mathbf{z}\in E}\delta_{\mathbf{z}}.$$

Soit $E^* = \prod_{i=1}^n \Delta_i^{-1}\mathbb{Z}$. La transformée de Fourier de f_e sera donc :

$$\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}\Big(\sum_{\mathbf{z}\in E}\delta_{\mathbf{z}}\Big) = \frac{1}{\Delta}\mathcal{F}(f) * \Big(\sum_{\mathbf{v}\in E^*}\delta_{\mathbf{v}}\Big) = \frac{1}{\Delta}\sum_{\mathbf{v}\in E^*}\tau_{\mathbf{v}}\big(\mathcal{F}(f)\big),$$

où $\tau_{\mathbf{v}}$ est la translation par $\mathbf{v}$. Cela donne :

$$\mathcal{F}(f_e)(\mathbf{u}) = \frac{1}{\Delta}\sum_{\mathbf{v}\in E^*}\mathcal{F}(f)(\mathbf{u}-\mathbf{v}).$$

NB : cette égalité peut être obtenue directement au moyen de la formule de Poisson, sans utiliser le peigne de Dirac. On remarque que $\mathcal{F}(f_e)$ est effectivement périodique de période $1/\Delta_i$ selon l'axe i. Notons de plus que si $\mathcal{F}(f)$ s'annule en dehors de l'intervale $I = \prod_{i=1}^n[-1/2\Delta_i, 1/2\Delta_i]$, alors $\Delta\mathcal{F}(f_e)(\mathbf{u} = \mathcal{F}(f)(\mathbf{u})$ pour $\mathbf{u}\in I$, donc $\mathcal{F}(f)$ est la restriction de $\mathcal{F}(f_e)$ à I (au facteur Δ près). Plus généralement, si $\mathcal{F}(f)$ s'annule en dehors de l'intervale $I = \prod_{i=1}^n[-\nu_i,\nu_i]$, on prend Δ_i tel que $\Delta_i^{-1}\geq 2\nu_i$, et en choisissant θ_i tel que $\nu_i \leq \theta_i < \Delta_i^{-1}-\nu_i$ $(i=1,\ldots,n)$, on a $\Delta\mathcal{F}(f_e)(\mathbf{u} = \mathcal{F}(f)(\mathbf{u})$ pour $\mathbf{u}\in\prod_{i=1}^n[-\theta_i,\theta_i]$. Cela signifie que f s'obtient (au facteur Δ près) à partir de f_e par un filtrage passe-bas $B_{\theta_1,\ldots,\theta_n}$ ayant une fréquence de coupure θ_i selon l'axe i :

$$f = \Delta f_e * B_{\theta_1,\ldots,\theta_n} = \Delta\sum_{\mathbf{z}\in E} f(\mathbf{z})\tau_{\mathbf{z}}\big(B_{\theta_1,\ldots,\theta_n}\big),$$

donc

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{z}\in E} f(\mathbf{z})\Delta\cdot B_{\theta_1,\ldots,\theta_n}(\mathbf{x}-\mathbf{z}).$$

Notons en particulier que pour $\theta_i = 1/2\Delta_i$ on a

$$\Delta\cdot B_{1/2\Delta_1,\ldots,1/2\Delta_n}(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n}\frac{\sin(\pi\Delta_i^{-1}x_i)}{\pi\Delta_i^{-1}x_i}.$$

La fréquence $2\nu_i$ est la *fréquence de Nyquist* selon l'axe i.