UFR de Mathématique et Informatique
L2 Mathématiques, option Informatique

Théorie des Graphes — 2005-2006

Contrôle Continu, 4 avril 2006

Durée : 1 heure

Documents et calculettes autorisés — Téléphones portables et ordinateurs interdits

Justifier soigneusement les réponses

(1) On considère un arbre à n sommets, où $n \geq 2$. Pour $k = 1, \ldots, n-1$, soit m_k le nombre de sommets de degré k (NB: il n'y a pas de sommet de degré 0 ou $\geq n$). Démontrer (en utilisant les théorèmes sur les degrés et sur le nombre d'arêtes) que

$$\sum_{k=3}^{n-1} (k-2) m_k = m_1 - 2 \ .$$

(2) Utiliser **(1)** pour démontrer (par induction) que si l'arbre n'a que 2 sommets de degré 1 ($m_1 = 2$), alors il est réduit à une chaîne $s_1, a_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, a_{n-1}, s_n$, c.-à-d. $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ et $A = \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ avec $\delta(a_i) = \{s_i, s_{i+1}\}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$.