UFR de Mathématique et Informatique
L2 Informatique

Combinatoire — 05-06

1ère feuille d'exercices

Justifier soigneusement les réponses

On suppose admises les propriétés suivantes de la composition $f_2 \circ f_1$ de deux fonctions $f_1 : A_1 \to A_2$ et $f_2 : A_2 \to A_3$ (pour A_1, A_2, A_3 quelconques) :

(a) Si f_1 et f_2 sont injectives, alors $f_2 \circ f_1$ est injective.
(b) Si f_1 et f_2 sont surjectives, alors $f_2 \circ f_1$ est surjective.
(c) Si $f_2 \circ f_1$ est injective, alors f_1 est injective.
(d) Si $f_2 \circ f_1$ est surjective, alors f_2 est surjective.

(1) Soient $f : A \to B$ et $g : B \to A$. Montrer que :
(i) f et g sont bijectives si et seulement si $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bijectives.
(ii) f est une bijection et g est la bijection inverse de f si et seulement si $f \circ g = Id_B$ et $g \circ f = Id_A$.

(2) Soit $f : A \to B$ ($A, B \neq \emptyset$). Montrer que :
(i) f est injective si et seulement s'il existe une application $g : B \to A$ telle que $g \circ f = Id_A$. Que peut-on dire de g ?
(ii) f est surjective si et seulement s'il existe une application $g : B \to A$ telle que $f \circ g = Id_B$. Que peut-on dire de g ?

(3) On considère trois applications $f : A \to B$, $g : B \to A$, et $h : B \to A$, telles que $g \circ f = Id_A$ et $f \circ h = Id_B$. Montrer que $h = g$. (Indication : calculer $g \circ f \circ h$).

(4) Soit P une partie *infinie* de $\mathbb{N}$. Construire par récurrence une bijection $f : \mathbb{N} \to P$ strictement croissante (c.-à-d. telle que $f(n) < f(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Montrer par récurrence que f est l'unique bijection strictement croissante $\mathbb{N} \to P$. En d'autres termes, il existe une unique suite strictement croissante a_n ($n \in \mathbb{N}$) telle que $P = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(5) Construire une bijection $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ en partant du principe : *"tout entier > 0 se décompose de façon unique en un produit d'une puissance de 2 et d'un nombre impair"*.

(6) On définit la suite de Fibonacci F_n, $n \geq 0$, comme suit :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

(a) Calculer F_n pour $n = 0, 1, 2$.

(*b*) Vérifier que pour tout $n \geq 0$ on a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. (NB: $(1+\sqrt{5})/2$ et $(1-\sqrt{5})/2$ sont les racines du polynôme $X^2 - X - 1$).

(*c*) Démontrer par récurrence que $F_n \in \mathbb{N}^*$ pour tout $n \geq 0$, et en déduire que la suite F_n est strictement croissante pour $n \geq 1$.

(7) Etant donnés 3 ensembles A, B et C, décrire $\left(A^B\right)^C$ et $A^{(B\times C)}$, et donner une bijection "naturelle" entre ces deux ensembles. En déduire une bijection entre $\left(A^B\right)^C$ et $\left(A^C\right)^B$.

(8) *Application :*
En imagerie informatique, un niveau de gris correspond à une intensité lumineuse, et est codé par un entier compris entre 0 (correspondant au noir) et 255 (correspondant au blanc). Soit $T = \{0, 1, \ldots, 254, 255\}$ l'ensemble des niveaux de gris codés. Une couleur est codée par un triplet (r, v, b) d'intensités correspondant aux composantes de rouge, verte et bleue de la couleur, avec $r, v, b \in T$. Donc l'ensemble des couleurs codées est T^3.

Une image est définie sur un rectangle E de pixels (taches lumineuses), on peut la considérer comme une fonction I associant à tout pixel $p \in E$ un niveau de gris ou une couleur, qu'on notera $I(p)$. Donc une image à niveaux de gris est une fonction $E \to T$ et une image en couleurs est une fonction $E \to T^3$.

Commenter les 3 affirmations suivantes, et faire le lien avec les ensembles $\left(T^3\right)^E$, $T^{(\{0,1,2\}\times E)}$ et $\left(T^E\right)^3$:

(*a*) Une image en couleurs associe à tout pixel une couleur à composantes rouge, verte et bleue.

(*b*) Une image en couleurs est constituée d'un triplet d'images à niveaux de gris, qui donnent les composantes rouge, verte et bleue de l'image en couleurs.

(*b*) Une image en couleurs correspond à une image à niveaux de gris définie sur un empilement de 3 rectangles identiques à E ; on a ainsi 3 couches correspondant aux composantes rouge, verte et bleue de l'image en couleurs.