UFR de Mathématique et Informatique
L2 Informatique

Combinatoire — 2006-2007

Contrôle Terminal, session de septembre 2007

Durée : 1 heure
Tous documents et calculettes autorisés
Téléphones et ordinateurs portables interdits

Justifier soigneusement les réponses

(1) On a un jeu de cartes ordinaire comprenant 52 cartes de 13 figures (1, …, 10, valet J, dame Q et roi K) de 4 couleurs (coeur $\heartsuit$, carreau $\diamondsuit$, trèfle $\clubsuit$ et pique $\spadesuit$). On appelle une *donne* un choix de 5 cartes (non ordonnées). Donner une formule pour les nombres :

(i) de donnes avec des cartes de 5 figures différentes ;
(ii) de donnes comprenant exactement 1 trèfle $\clubsuit$ et 1 pique $\spadesuit$;
(iii) de donnes ne comprenant aucun trèfle $\clubsuit$;
(iv) de donnes comprenant au moins 1 trèfle $\clubsuit$ et au moins 1 pique $\spadesuit$;
(v) de donnes comprenant 2 cartes rouges (coeur $\heartsuit$ ou carreau $\diamondsuit$) et 3 cartes noires (trèfle $\clubsuit$ ou pique $\spadesuit$).

(2) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donnée par $f(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier $\leq x$.

(i) Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.
(ii) Montrer que pour $n \geq 3$, on a $2 \leq f(n) < n$, et que la restriction de f aux $n \geq 2$ est un fonction $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ qui décroît les valeurs : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $f(n) \leq n$.
(iii) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ quel est son cycle attracteur (en fait, f a exactement deux cycles attracteurs).

(Vous savez probablement que toute famille d'entiers naturels possède un minimum, par conséquent une suite décroissante d'entiers naturels $n_0 \geq n_1 \geq n_2 \geq \ldots$ atteint un certain moment son minimum, c.-à-d. il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n_k = n_{k+1} = n_{k+2} = \ldots$.)