L2 Informatique — Combinatoire — 2005-2006

Contrôle Terminal, session de septembre 2006

Corrigé

(1) La réponse est aisée si on connaît bien le cours, les TDs et le corrigé de l'examen de janvier. Soit

$$X = \sum_{k=0}^{m} \binom{4m}{2k} = \binom{4m}{0} + \binom{4m}{2} + \cdots + \binom{4m}{2m} \quad .$$

En utilisant $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$, on obtient

$$X = \sum_{k=0}^{m} \binom{4m}{4m-2k} = \binom{4m}{4m} + \binom{4m}{4m-2} + \cdots + \binom{4m}{2m} = \sum_{k=m}^{2m} \binom{4m}{2k} \quad .$$

Par conséquent

$$2X = \left[\sum_{k=0}^{m} \binom{4m}{2k}\right] + \left[\sum_{k=m}^{2m} \binom{4m}{2k}\right]$$

$$= \left[\binom{4m}{0} + \cdots + \binom{4m}{2m}\right] + \left[\binom{4m}{2m} + \cdots + \binom{4m}{4m}\right] = \left[\sum_{k=0}^{2m} \binom{4m}{2k}\right] + \binom{4m}{2m} \quad .$$

On a vu en TD que le nombre de parties de cardinal pair d'un ensemble de cardinal n vaut 2^{n-1}, donc

$$\sum_{k=0}^{2m} \binom{4m}{2k} = \binom{4m}{0} + \binom{4m}{2} + \cdots + \binom{4m}{4m} = 2^{4m-1} \quad .$$

Cela donne $2X = 2^{4m-1} + \binom{4m}{2m}$, et ainsi

$$X = 2^{4m-2} + \frac{\binom{4m}{2m}}{2} = 2^{4m-2} + \frac{(4m)!}{2 \times (2m)! \times (2m)!} \quad .$$

(2) On va montrer que

$$(iv) \implies (iii) \left\{ \begin{array}{c} \implies (i) \implies \\ \implies (ii) \implies \end{array} \right\} (iv)$$

$(iv) \implies (iii)$:
L'identité est bijective : si $f(x) = x$ pour tout $x \in E$, alors pour tout $y \in E$ il existe un et un seul $x \in E$ tel que $f(x) = y$, à savoir $x = y$.

$(iii) \implies (i)$ et $(iii) \implies (ii)$:
En effet, une application bijective est à la fois injective et surjective.

$(i) \implies (iv)$:
Supposons f injective. L'idempotence donne $f(f(x)) = f(x)$ pour tout $x \in E$, donc par l'injectivité de f, on a $f(x) = x$ (pour tout $x \in E$), c.-à-d. f est l'identité sur E.

$(ii) \implies (iv)$:
Supposons f surjective. Donc pour tout $x \in E$ il existe $y \in E$ avec $f(y) = x$. L'idempotence donne $f(f(y)) = f(y)$, c.-à-d. $f(x) = f(f(y)) = f(y) = x$, et ainsi f est l'identité sur E.

(3) On a $a\ R\ b$ si et seulement si $b = a + 3$. Soit S la relation donnée par $a\ S\ b$ si et seulement si $b \equiv a\ (mod.\ 3)$ et $b \geq a$, en d'autres termes, si et seulement si il existe $m \in \mathbb{N}$ avec $b = a + 3m$.

Montrons que S est la relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}$ engendrée par R, c.-à-d. S est un ordre partiel, S contient R (ce qui veut dire : $a\ R\ b \implies a\ S\ b$), et toute relation d'ordre partiel qui contient R doit contenir S.

S est réflexive : $a = a + 3 \times 0$, donc $a\ S\ a$.

S est antisymétrique : Si $a\ S\ b$ et $b\ S\ a$, on a nécessairement $a \leq b$ et $b \leq a$, donc $a = b$.

S est transitive : Si $a\ S\ b$ et $b\ S\ c$, on a $m, m' \in \mathbb{N}$ tels que $b = a + 3m$ et $c = b + 3m'$. Donc $c = (a + 3m) + 3m' = a + 3(m + m')$, avec $m + m' \in \mathbb{N}$, c.-à-d. $a\ S\ c$.

S contient R : Si $a\ R\ b$, alors $b = a + 3 = a + 3 \times 1$, avec $1 \in \mathbb{N}$, donc $a\ S\ b$.

Toute relation d'ordre partiel contenant R doit contenir S : Soit T une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}$, contenant R ($a\ R\ b \implies a\ T\ b$). Montrons que $a\ S\ b \implies a\ T\ b$, c.-à-d. que pour tout $m \in \mathbb{N}$, si $b = a + 3m$, alors $a\ T\ b$. Nous le faisons par récurrence sur m.

— Pour $m = 0$: On a $a = b$, et comme T est réflexive, on a $a\ T\ b$.

— Si c'est vrai pour $m = n$, alors ce l'est pour $m = n + 1$. Supposons que $b = a + 3(n + 1)$; posons $c = a + 3n$, donc $b = c + 3$. Par hypothèse d'induction, $a\ T\ c$. Par définition, $c\ R\ b$, et comme T contient R, on en déduit que $c\ T\ b$. Comme $a\ T\ c$ et $c\ T\ b$, et que T est transitive, cela donne $a\ T\ b$.

Donc c'est vrai pour tout $m \in \mathbb{N}$, que $b = a + 3m$ implique $a\ T\ b$, c.-à-d. T contient S.

Remarque : En fait, comme R est antisymétrique et irréflexive, $Id \cup R$ sera réflexive et antisymétrique, donc la fermeture transitive de $Id \cup R$, à savoir $Id \cup R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$ sera un ordre partiel. Ainsi on trouve S en prenant à partir de a :

$$
\begin{gathered}
a\ , \\
a\ R\ a + 3\ , \\
a\ R\ a + 3\ R\ a + 6\ , \\
a\ R\ a + 3\ R\ a + 6\ R\ a + 9\ , \\
\ldots
\end{gathered}
$$