UFR de Mathématique et Informatique
L2 Informatique

Combinatoire — 2005-2006

Contrôle Terminal, session de septembre 2006

Durée : 1 heure
Tous documents et calculettes autorisés
Téléphones et ordinateurs portables interdits

Justifier soigneusement les réponses

(1) Connaissant le lien entre $\binom{n}{n-p}$ et $\binom{n}{p}$ vu en cours, ainsi que l'exercice de TD sur le nombre de parties de cardinal pair d'un ensemble, calculer :

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{4m}{2k} = \binom{4m}{0} + \binom{4m}{2} + \cdots + \binom{4m}{2m}$$

pour $m > 0$.

(2) Supposons l'application $f : E \to E$ *idempotente*, c.-à-d. pour tout $x \in E$ on a $f(f(x)) = f(x)$. Montrer que les 4 énoncés suivants sont équivalents :

(*i*) f est injective ;
(*ii*) f est surjective ;
(*iii*) f est bijective ;
(*iv*) $f = Id_E$, l'identité sur E, c.-à-d. pour tout $x \in E$ on a $f(x) = x$.

(3) On définit la relation R sur $\mathbb{N}$ par $a \ R \ b$ si et seulement si $a = b - 3$. Quelle est la relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}$ engendrée par R (c.-à-d. la plus petite relation réflexive, antisymétrique et transitive contenant R) ?