UFR de Mathématique et Informatique
L3 Informatique

Probabilités, Statistiques et Combinatoire — 2008-2009

Contrôle Terminal, partie "Combinatoire" — session de mai-juin 2009

Corrigé

(1) Suivons l'indication donnée dans l'énoncé. On a une boîte avec p boules bleues, q boules vertes et r boules rouges, donc $p+q+r$ boules en tout. On prend m boules dans cette boîte. Le nombre de choix possibles, en ignorant les couleurs, est $\binom{p+q+r}{m}$.

Si on tient compte des couleurs, un tel choix de m boules comprendra un certain nombre de boules de chaque couleur. Pour deux entiers $a, b \geq 0$, soit $X(a,b)$ le nombre de choix possibles de m boules, dont a boules bleues et b boules vertes (donc $m-a-b$ boules rouges). Il y a

- $\binom{p}{a}$ choix de a boules bleues parmi les p que compte la boîte,
- $\binom{q}{b}$ choix de b boules vertes parmi les q que compte la boîte,
- et $\binom{r}{m-a-b}$ choix de $m-a-b$ boules rouges parmi les r que compte la boîte ;

de plus, ces 3 choix sont indépendants, on peut combiner n'importe quels choix d'une boule bleue, d'une verte et d'une rouge. Donc

$$X(a,b) = \binom{p}{a}\binom{q}{b}\binom{r}{m-a-b} \quad .$$

Notons que $X(a,b) \neq 0$ uniquement si

$$0 \leq a \leq p \quad , \quad 0 \leq b \leq q \quad , \quad 0 \leq m-a-b \leq r \quad .$$

En effet, $\binom{n}{t} = 0$ si $t < 0$ ou $t > n$ (dans un ensemble de cardinal n, il y a aucune partie de cardinal < 0 ou $> n$).

Tout choix de m boules parmi les $p+q+r$ comprendra un certain nombre a de boules bleues et b de boules vertes (donc $m-a-b$ de boules rouges), et ces nombres a et b sont uniques pour chaque choix. Donc les couples (a,b) partitionnent les $\binom{p+q+r}{m}$ choix, et on obtient

$$\binom{p+q+r}{m} = \sum_{(a,b)} X(a,b) = \sum_a \sum_b X(a,b) = \sum_a \sum_b \binom{p}{a}\binom{q}{b}\binom{r}{m-a-b} \quad .$$

Si on ne veut pas utiliser l'indication et raisonner, on peut toujours s'en sortir par le calcul ; on prouve alors l'égalité par induction sur $p+q+r$, en s'aidant de la formule

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \quad ,$$

mais c'est beaucoup plus pénible.

Supposons $p+q+r=0$, donc $p=q=r=0$; alors $\binom{p+q+r}{m} \neq 0$ ssi $m=0$, et $\binom{p}{a}\binom{q}{b}\binom{r}{m-a-b} \neq 0$ ssi $a=b=m-a-b=0$. Donc pour $m>0$ on obtient

$$\sum_a \sum_b \binom{p}{a}\binom{q}{b}\binom{r}{m-a-b} = \sum_a \sum_b 0 = 0 = \binom{p+q+r}{m} \ ,$$

tandis que pour $m=0$ on obtient

$$\sum_a \sum_b \binom{p}{a}\binom{q}{b}\binom{r}{m-a-b} = \binom{p}{0}\binom{q}{0}\binom{r}{0} = 1 = \binom{p+q+r}{m} \ .$$

La formule est donc vraie pour $p+q+r=0$.

Supposons la formule vraie pour $p+q+r=n$, montrons qu'elle l'est pour $p+q+r=n+1>0$. Prenons p,q,r avec $p+q+r=n+1$. On a

$$\binom{p+q+r}{m} = \binom{p+q+r-1}{m} + \binom{p+q+r-1}{m-1} \ .$$

Supposons d'abord que $r>0$. Par l'hypothèse d'induction sur n on a

$$\binom{p+q+r-1}{m} = \sum_a \sum_b \binom{p}{a}\binom{q}{b}\binom{r-1}{m-a-b}$$

et

$$\binom{p+q+r-1}{m-1} = \sum_a \sum_b \binom{p}{a}\binom{q}{b}\binom{r-1}{m-1-a-b} \ .$$

En combinant les 3 équations, on obtient :

$$\begin{aligned}\binom{p+q+r}{m} &= \sum_a \sum_b \binom{p}{a}\binom{q}{b}\binom{r-1}{m-a-b} + \sum_a \sum_b \binom{p}{a}\binom{q}{b}\binom{r-1}{m-1-a-b} \\ &= \sum_a \sum_b \left[\binom{p}{a}\binom{q}{b}\binom{r-1}{m-a-b} + \binom{p}{a}\binom{q}{b}\binom{r-1}{m-1-a-b}\right] \\ &= \sum_a \sum_b \binom{p}{a}\binom{q}{b}\left[\binom{r-1}{m-a-b} + \binom{r-1}{m-1-a-b}\right] = \sum_a \sum_b \binom{p}{a}\binom{q}{b}\binom{r}{m-a-b} \ .\end{aligned}$$

Si $r=0$, on peut supposer $q>0$. Par l'hypothèse d'induction on a

$$\binom{p+q+r-1}{m} = \sum_a \sum_b \binom{p}{a}\binom{q-1}{b}\binom{r}{m-a-b}$$

et

$$\binom{p+q+r-1}{m-1} = \sum_a \sum_b \binom{p}{a}\binom{q-1}{b}\binom{r}{m-1-a-b} \ ;$$

en posant $b'=b+1$ ($b=b'-1$), cela donne

$$\binom{p+q+r-1}{m-1} = \sum_a \sum_{b'} \binom{p}{a}\binom{q-1}{b'-1}\binom{r}{m-a-b'} \ .$$

Ici on obtient (en remplaçant b' par b dans la 2ème ligne) :

$$\begin{aligned}\binom{p+q+r}{m} &= \sum_a \sum_b \binom{p}{a}\binom{q-1}{b}\binom{r}{m-a-b} + \sum_a \sum_{b'} \binom{p}{a}\binom{q-1}{b'-1}\binom{r}{m-a-b'} \\ &= \sum_a \sum_b \left[\binom{p}{a}\binom{q-1}{b}\binom{r}{m-a-b} + \binom{p}{a}\binom{q-1}{b-1}\binom{r}{m-a-b}\right] \\ &= \sum_a \sum_b \binom{p}{a}\binom{r}{m-a-b}\left[\binom{q-1}{b} + \binom{q-1}{b-1}\right] = \sum_a \sum_b \binom{p}{a}\binom{r}{m-a-b}\binom{q}{b} \ .\end{aligned}$$

Enfin, si $q=r=0$, on a $p>0$, et on fait comme ci-dessus, mais en intervertissant les rôles de p et q.

(2) On a la relation binaire $\overset{p}{\sim}$ sur $\mathcal{P}(E)$ définie par $A \overset{p}{\sim} B$ si et seulement si $p \in A$ et $B = A \setminus \{p\}$, ou $p \notin A$ et $B = A \cup \{p\}$.

(i) Supposons $A \overset{p}{\sim} B$, nous déterminons pour quels $C \in \mathcal{P}(E)$ on a $B \overset{p}{\sim} C$.

— Si $p \in A$, alors $B = A \setminus \{p\}$; donc $p \notin B$, ce qui donne que $B \overset{p}{\sim} C$ ssi $C = B \cup \{p\}$, c.-à-d. $C = (A \setminus \{p\}) \cup \{p\} = A$.

— Si $p \notin A$, alors $B = A \cup \{p\}$ donc $p \in B$, ce qui donne que $B \overset{p}{\sim} C$ ssi $C = B \setminus \{p\}$, c.-à-d. $C = (A \cup \{p\}) \setminus \{p\} = A$.

Donc dans les deux cas, $A \overset{p}{\sim} B$ donne $B \overset{p}{\sim} C$ si et seulement si $C = A$.

(ii) On voit dans la définition de $\overset{p}{\sim}$ que quand $A \overset{p}{\sim} B$, A et B sont différents, puisque l'un comprend p, l'autre pas. Donc $A \overset{p}{\sim} A$ est impossible. Donc la relation $\overset{p}{\sim}$ n'est pas réflexive, elle est même irréflexive.

On a vu en (i) que si $A \overset{p}{\sim} B$, alors $B \overset{p}{\sim} A$, donc la relation $\overset{p}{\sim}$ est symétrique.

Toujours en (i), on a vu que si $A \overset{p}{\sim} B$ et $B \overset{p}{\sim} C$, alors $C = A$. Si la relation $\overset{p}{\sim}$ était transitive, on obtiendrait $A \overset{p}{\sim} A$, ce qui est impossible, comme expliqué ci-dessus. Donc la relation $\overset{p}{\sim}$ n'est pas transitive.

(iii) Soit $\equiv$ l'union de $\overset{p}{\sim}$ et de l'identité $=$, c.-à-d. $A \equiv B$ ssi $A \overset{p}{\sim} B$ ou $A = B$. On voit que $\equiv$ est :

— réflexive, car $A = A$, donc $A \equiv A$;

— symétrique, car $A \equiv B$ donne $A \overset{p}{\sim} B$ ou $A = B$, donc $B \overset{p}{\sim} A$ ou $B = A$ (puisque $\overset{p}{\sim}$ et $=$ sont symétriques), d'où $B \equiv A$;

— transitive, car $A \equiv B \equiv C$ donne 4 cas :
  - $A = B = C$, donc $A = C$;
  - $A \overset{p}{\sim} B = C$, donc $A \overset{p}{\sim} C$;
  - $A = B \overset{p}{\sim} C$, donc $A \overset{p}{\sim} C$;
  - $A \overset{p}{\sim} B \overset{p}{\sim} C$, donc $A = C$.

Par conséquent $\equiv$ est une relation d'équivalence. Toute relation d'équivalence contenant $\overset{p}{\sim}$ doit aussi contenir l'identité, c.-à-d. elle contient $\equiv$. Donc $\equiv$ est bien la plus petite relation d'équivalence contenant $\overset{p}{\sim}$, c'est la relation d'équivalence engendrée par $\overset{p}{\sim}$.

On peut aussi dire que $A \equiv B$ ssi A et B sont identiques "à p près", en d'autres termes

$$A \equiv B \iff A \cap (E \setminus \{p\}) = B \cap (E \setminus \{p\}) \ .$$

(iv) (**Bonus**) Soient $p, q \in E$ avec $p \neq q$. La relation d'équivalence engendrée par la réunion de $\overset{p}{\sim}$ et $\overset{q}{\sim}$ est la réunion de l'identité $=$, de $\overset{p}{\sim}$, $\overset{q}{\sim}$ et de $\overset{p}{\sim}\overset{q}{\sim}$ (le produit des deux). En d'autres termes, c'est la relation $\equiv$ donnée par $A \equiv B$ ssi une des conditions suivantes est vérifiée :

(1) $A = B$; (2) $p \in A$ et $B = A \setminus \{p\}$; (3) $p \notin A$ et $B = A \cup \{p\}$; (4) $q \in A$ et $B = A \setminus \{q\}$; (5) $q \notin A$ et $B = A \cup \{q\}$; (6) $p, q \in A$ et $B = A \setminus \{p, q\}$; (7) $p, q \notin A$ et $B = A \cup \{p, q\}$; (8) $p \in A$, $q \notin A$ et $B = (A \cup \{q\}) \setminus \{p\}$; (9) $p \notin A$, $q \in A$ et $B = (A \cup \{p\}) \setminus \{q\}$.

De manière succincte, $A \equiv B$ ssi A et B sont identiques "à p et q près", en d'autres termes

$$A \equiv B \iff A \cap (E \setminus \{p, q\}) = B \cap (E \setminus \{p, q\}) \ .$$