UFR de Mathématique et Informatique
L3 Informatique

Probabilités, Statistiques et Combinatoire — 2008-2009

Contrôle Terminal, partie "Combinatoire" — 2ème session de juin 2009

Durée conseillée : 1 heure

Documents autorisés : uniquement les 9 polycopiés de combinatoire

Téléphones, calculettes et ordinateurs interdits

Justifier soigneusement les réponses

(1) Soit E un ensemble fini de cardinal n. Calculer :

(i) Le nombre de couples (ordonnés) (A_1, A_2), où A_1 et A_2 sont des parties disjointes de E $(A_1, A_2 \in \mathcal{P}(E),\ A_1 \cap A_2 = \emptyset)$.

(ii) Le nombre de triples (ordonnés) (A_1, A_2, A_3), où A_1, A_2 et A_3 sont des parties mutuellement disjointes de E $(A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{P}(E),\ A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = \emptyset)$.

(iii) **Bonus :** Quel est nombre de quadruples (A_1, A_2, A_3, A_4), de quintuples $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$, etc., de parties mutuellement disjointes de E ?

Indication : binôme de Newton.

(2) Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 2$. Une *partition binaire* de E est une paire (non ordonnée) $\{A, B\}$, où $A, B \in \mathcal{P}(E)$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$. Calculer le nombre de partitions binaires.

(3) Soit $\mathbb{R}^2$ le plan euclidien ; l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ comprend toutes les parties de $\mathbb{R}^2$, c.-à-d. toutes les figures dans le plan. On définit la relation $\sim$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ par $A \sim B$ si B est obtenu en appliquant à A une rotation autour de l'origine d'un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre.

Décrire la relation d'équivalence engendrée par $\sim$. Dessiner la classe d'équivalence d'une figure en forme de R placée à droite de l'origine.