UFR de Mathématique et Informatique
L3 Informatique

Probabilités, Statistiques et Combinatoire — 2008-2009

Contrôle Terminal, partie "Combinatoire" — session de mai-juin 2009

Durée conseillée : 1 heure

Documents autorisés : uniquement les 9 polycopiés de combinatoire
Téléphones, calculettes et ordinateurs interdits

Justifier soigneusement les réponses

(1) Pour deux entiers $n, t \geq 0$, écrivons $\binom{n}{t}$ pour le coefficient binomial de t dans n, c.-à-d. le nombre de parties de cardinal t dans un ensemble de cardinal n.

Considérons des entiers $m, p, q, r > 0$ avec $m \leq p + q + r$. Démontrer qu'on a

$$\sum_a \sum_b \binom{p}{a}\binom{q}{b}\binom{r}{m-a-b} = \binom{p+q+r}{m} \ ,$$

où les variables entières a et b des deux sommes sont soumises aux 3 conditions

$$0 \leq a \leq p \ , \quad 0 \leq b \leq q \ , \quad 0 \leq m - a - b \leq r \ .$$

Indication : Si j'ai a boules bleues, b boules vertes et $m - a - b$ boules rouges, en oubliant les couleurs, cela fait m boules en tout.

(2) Soit E un ensemble de cardinal > 2. Pour $p \in E$, on définit la relation binaire $\overset{p}{\sim}$ sur $\mathcal{P}(E)$ (l'ensemble des parties de E), où pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on a $A \overset{p}{\sim} B$ si et seulement si une des deux conditions suivantes est vérifiée :

— p appartient à A, et B est obtenu en enlevant p de A : $p \in A$, et $B = A \setminus \{p\}$;

— p n'appartient pas à A, et B est obtenu en ajoutant p à A : $p \notin A$, et $B = A \cup \{p\}$.

Questions :

(i) Si $A \overset{p}{\sim} B$, pour quels $C \in \mathcal{P}(E)$ a-t-on $B \overset{p}{\sim} C$?

(ii) La relation $\overset{p}{\sim}$ est-elle réflexive ? symétrique ? transitive ?

(iii) Quelle est la relation d'équivalence engendrée par $\overset{p}{\sim}$ (c.-à-d. la plus petite relation d'équivalence $\equiv$ telle que $A \overset{p}{\sim} B \implies A \equiv B$) ?

(iv) **Bonus :** Soient $p, q \in E$ avec $p \neq q$. Quelle est la relation d'équivalence engendrée par la réunion de $\overset{p}{\sim}$ et $\overset{q}{\sim}$ (c.-à-d. la plus petite relation d'équivalence $\equiv$ telle que si $A \overset{p}{\sim} B$ ou $A \overset{q}{\sim} B$, alors $A \equiv B$) ?