UFR de Mathématique et Informatique
L3 Informatique S6

Probabilités, Statistiques et Combinatoire — 2010-2011, semestre d'automne

Contrôle Continu de Combinatoire, novembre 2010

Corrigé

(1) (i) Ces donnes se partitionnent en deux classes disjointes, selon la couleur du roi :

— un roi rouge (parmi 2) et 4 cartes noires non-rois (parmi 24);

— un roi noir (parmi 2), 1 carte rouge non-roi (parmi 24) et 3 cartes noires non-rois (parmi 24).

En effet, il y a $(13-1) \times 2 = 24$ cartes non-rois noires, et autant de non-rois rouges. Dans les 2 cas, les choix successifs sont indépendants l'un de l'autre, donc on multiplie ensemble leurs nombres. On obtient ainsi :

$$\binom{2}{1} \times \binom{24}{4} + \binom{2}{1} \times \binom{24}{1} \times \binom{24}{3} = 2 \times \binom{24}{4} + 2 \times 24 \times \binom{24}{3} \ .$$

(ii) Les donnes comprenant exactement une dame résultent du choix d'une dame (parmi 4) et indépendamment de 4 cartes non-dames (parmi $(13-1)\times 4 = 48$). Les donnes comprenant exactement une dame mais aucun trèfle résultent du choix d'une dame non-trèfle (parmi 3) et indépendamment de 4 cartes non-dames non-trèfles (parmi $(13-1) \times 3 = 36$). Comme "au mois un trèfle" est la négation de "aucun trèfle", pour les donnes comprenant exactement une dame et au moins un trèfle, on soustrait le deuxième nombre du premier, ce qui donne :

$$\binom{4}{1} \times \binom{48}{4} - \binom{3}{1} \times \binom{36}{4} = 4 \times \binom{48}{4} - 3 \times \binom{36}{4} \ .$$

(iii) Les cartes qui ne sont ni pique ni valet sont de $4-1=3$ couleurs et $13-1=12$ figures, il y en a 36, et il faut en choisir 5 :

$$\binom{36}{5} \ .$$

(iv) Il faut additionner:

— les donnes comprenant 0 coeur, 0 trèfle et 5 piques ou carreaux ;

— les donnes comprenant 1 coeur, 1 trèfle et 3 piques ou carreaux ;

— les donnes comprenant 2 coeurs, 2 trèfles et 1 pique ou carreau.

Les choix de coeurs (parmi 13), de trèfles (parmi 13) et de piques ou carreaux (parmi 26) sont indépendants, donc se multiplient. On obtient ainsi :

$$\binom{26}{5} + \binom{13}{1} \times \binom{13}{1} \times \binom{26}{3} + \binom{13}{2} \times \binom{13}{2} \times \binom{26}{1} = \binom{26}{5} + 13^2 \times \binom{26}{3} + \binom{13}{2}^2 \times 26 \ .$$

On peut aussi écrire :

$$\sum_{n=0}^{2} \binom{13}{n}^2 \times \binom{26}{5-2n} \ .$$

(2) Soient $P = \{z \in \mathbb{Z} \mid z > 0\}$ (l'ensemble des entiers strictement positifs), $N = \{z \in \mathbb{Z} \mid z < 0\}$ (l'ensemble des entiers strictement négatifs) et $O = \{0\}$. Ces trois ensembles forment une partition de $\mathbb{Z}$. La relation d'équivalence M correspondante est "appartenir à la même classe P, N ou O", ce qui signifie "avoir le même signe", c.-à-d. $a\ M\ b$ si et seulement si soit $a > 0$ et $b > 0$, soit $a < 0$ et $b < 0$, soit $a = b = 0$. Montrons que M est bien la relation d'équivalence engendrée par R.

(a) *M est une relation d'équivalence*, comme expliqué ci-dessus.

(b) *M contient R.* Si $a\ R\ b$, on a un entier $n > 0$ tel que $b = 2n \times a$, donc soit $a > 0$ et $b > 0$, soit $a < 0$ et $b < 0$, soit $a = b = 0$; par conséquent $a\ M\ b$. Ainsi $a\ R\ b \implies a\ M\ b$, et M contient R.

(c) *Toute relation d'équivalence S contenant R doit contenir M.* Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a\ M\ b$. Si $a = b = 0$, alors $b = 2a$, donc $a\ R\ b$, et comme S contient R, on a $a\ S\ b$. Si $a > 0$ et $b > 0$, on obtient $a\ R\ (2b \times a)$ et $b\ R\ (2a \times b)$, avec $2b \times a = 2a \times b$; de même si $a < 0$ et $b < 0$, on obtient $a\ R\ (2|b| \times a)$ et $b\ R\ (2|a| \times b)$, avec $2|b| \times a = -2|a|\,|b| = 2|b| \times a$. Donc les deux cas $a, b > 0$ et $a, b < 0$ impliquent qu'il existe $c \in \mathbb{Z}$ avec $a\ R\ c$ et $b\ R\ c$; comme S contient R, on a $a\ S\ c$ et $b\ S\ c$, par symétrie de S cela donne $c\ S\ b$, et par transitivité de S on obtient $a\ S\ b$. Donc $a\ M\ b \implies a\ S\ b$, et S contient M.

Comme vu plus haut, les classes d'équivalence de M sont P, N et O.

Intuitivement, si partant d'un entier, on itère la relation R et son inverse R^{-1}, on obtient alors tous les entiers de même signe, et uniquement ceux-ci.

(3) On utilise les 4 propriétés suivantes :

- L'opération de composition d'applications est associative : quand on compose 3 applications, on peut mettre entre parenthèses soit le produit des deux premières, soit le produit des deux dernières ;
- bijective signifie à la fois injective et surjective ;
- si la composition de deux applications est injective, alors la première (écrite à droite) est injective ;
- si la composition de deux applications est surjective, alors la dernière (écrite à gauche) est surjective.

On obtient ainsi :

- $(h \circ g) \circ f$ est injective, donc f est injective ;
- $(g \circ f) \circ h$ est injective, donc h est injective ;
- $(f \circ h) \circ g$ est injective, donc g est injective ;
- $h \circ (g \circ f)$ est surjective, donc h est surjective ;
- $g \circ (f \circ h)$ est surjective, donc g est surjective ;
- $f \circ (h \circ g)$ est surjective, donc f est surjective.

On en déduit que f, g et h sont à la fois injectives et surjectives, donc bijectives.