**UFR de Mathématique et Informatique**
**L3 Informatique**

**Probabilités, Statistiques et Combinatoire — 2009-2010**

**Contrôle Continu de Combinatoire, mars 2010**

*Corrigé*

**(1)** Il faut faire attention à ce que toute suite de choix ne produise qu'une seule donne. Par exemple, pour $(i)$, après avoir choisi 1 roi, pour avoir 4 autres cartes dont au moins une dame, il ne convient pas de choisir une dame parmi les 4 puis de choisir 3 cartes parmi les 47 restantes, car les 2 choix

$(a)$ **Q**$\heartsuit$ puis **Q**$\spadesuit$, **10**$\diamondsuit$, **8**$\clubsuit$ et

$(b)$ **Q**$\spadesuit$ puis **Q**$\heartsuit$, **10**$\diamondsuit$, **8**$\clubsuit$

produisent la même donne.

$(i)$ Il y a $\binom{4}{1} = 4$ façons de choisir un roi. Ensuite, il y a $\binom{48}{4}$ choix de 4 cartes en dehors des rois, dont $\binom{44}{4}$ choix ne comprenant aucune dame. Comme "au moins une dame" est la négation de "aucune dame", on obtient le nombre suivant de donnes :

$$4 \times \left[ \binom{48}{4} - \binom{44}{4} \right] .$$

$(ii)$ Pour chacune des 4 couleurs, le nombre de donnes comprenant uniquement cette couleur est $\binom{13}{5}$. Comme "au moins 2 couleurs" est la négation de "une seule couleur", on obtient le nombre suivant de donnes :

$$\binom{52}{5} - 4 \times \binom{13}{5} .$$

$(iii)$ Il y a $\binom{26}{5}$ donnes composées uniquement de cartes rouges, et autant composées uniquement de cartes noires. Donc on obtient le nombre suivant de donnes rouges et noires :

$$\binom{52}{5} - 2 \times \binom{26}{5} .$$

$(iv)$ Le nombre de donnes de ce type est le suivant :

$$\binom{26}{3} \times \binom{26}{2} .$$

**(2)** Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donnée par

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n+1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

$(i)$ $f(0) = 0$, $f(1) = 2$ et $f(2) = 1$.

$(ii)$ Pour $n > 0$, on voit facilement que $n+1, \frac{n}{2} > 0$, donc $f(n) > 0$ ; par induction, il s'ensuit que pour tout entier $m \geq 0$ on a $f^m(n) > 0$, en particulier $f^2(n) = f(f(n)) > 0$. Pour $n \geq 3$, soit $n$ est impair, $f(n) = n + 1$ et $f(f(n)) = \frac{n+1}{2} < n$, soit $n$ est pair non multiple de 4, $f(n) = \frac{n}{2}$ et $f(f(n)) = \frac{n}{2} + 1 < n$, soit $n$ est multiple de 4, $f(n) = \frac{n}{2}$ et $f(n) = \frac{n}{4} < n$ ; donc $f(f(n)) < n$ de toute façon, et $0 < f(f(n))$. Soit $k = f^p(n)$ le plus petit de tous les $f^m(n)$ pour $m \in \mathbb{N}$ ; comme vu plus haut, $k > 0$ ; si on avait $k \geq 3$, on obtiendrait alors $f^{p+2}(n) = f(f(f^p(n))) = f(f(k)) < k = f^p(n)$, une contradiction ; donc $0 < k < 3$, c.-à-d. $f^p(n) = 1$ ou 2.

*(iii)* Le cycle attracteur de 0 est $\{0\}$, de période 1, tandis que pour $n > 0$, son cycle attracteur est $\{1, 2\}$, de période 2.

**(3)** La relation $\equiv$ est réflexive, car $f^n = f^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle est symétrique, car $f^m = g^n \implies g^n = f^m$. Enfin elle est transitive, car si $f^m = g^n$ et $g^p = h^q$ alors

$$f^{mp} = (f^m)^p = (g^n)^p = g^{np} = (g^p)^n = (h^q)^n = h^{qn} \quad .$$