UFR de Mathématique et Informatique
L3 Informatique

Probabilités, Statistiques et Combinatoire — 2009-2010

Contrôle Continu de Combinatoire, mars 2010

Durée : 1 heure

Tous documents (papier) autorisés
Calculettes inutiles
Téléphones et ordinateurs interdits

Justifier soigneusement les réponses

(1) On a un jeu de cartes ordinaire comprenant 52 cartes de 13 *figures* (**1**, …, **10**, valet **J**, dame **Q** et roi **K**) dans chacune des 4 *couleurs* (coeur $\heartsuit$, carreau $\diamondsuit$, trèfle $\clubsuit$ et pique $\spadesuit$). On appelle une *donne* un choix de 5 cartes *non ordonnées.* Donner une formule pour les nombres :

(i) de donnes comprenant exactement un roi et au moins une dame ;
(ii) de donnes comprenant au moins 2 couleurs parmi les 4 (coeur, carreau, trèfle et pique) ;
(iii) de donnes comprenant au moins une carte rouge (coeur ou carreau) et au moins une carte noire (trèfle ou pique);
(iv) de donnes comprenant 3 cartes rouges (coeur ou carreau) et 2 cartes noires (trèfle ou pique).

NB : il n'est pas nécessaire de calculer la valeur arithmétique des formules données.

(2) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donnée par

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n+1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

(i) Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.
(ii) Montrer que pour $n \geq 3$, on a $0 < f(f(n)) < n$; en déduire qu'il existe un entier m tel que $f^m(n)$ (le résultat de m applications de f à n) soit égal à 1 ou 2.
(iii) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ quel est son cycle attracteur, et sa période.

(3) Soit E un ensemble non-vide, et considérons E^E l'ensemble des fonctions $E \to E$. Nous définissons la relation binaire $\equiv$ sur E^E par

$$f \equiv g \iff \exists\, m, n \in \mathbb{N},\ f^m = g^n \ ,$$

où f^m est la composition de f répété m fois ($f^0 = Id_E$, $f^m = f \circ f^{m-1}$ pour $m > 0$). La relation $\equiv$ est-elle réflexive ? symétrique ? transitive ?