**UFR de Mathématique et Informatique**
**L2 Informatique**

## Combinatoire — 2006-2007

### Contrôle Continu, novembre 2006

*Corrigé*

**(1)** On utilise les faits énoncés dans le support de cours 2 (fonctions) ou dans la 1ère feuille de TD.
$(iii) \implies (i, ii)$: Comme $Id_A$ est bijective et $g \circ f = Id_A$, $g \circ f$ est à la fois injective et surjective, donc $f$ est injective et $g$ est surjective.
$(i) \implies (iii)$: Pour tout $a \in A$, on a $f(g(f(a))) = f(a)$, et comme $f$ est injective, cela implique que $g(f(a)) = a$ pour tout $a \in A$, donc $g \circ f = Id_A$.
$(ii) \implies (iii)$: Comme $g$ est surjective, pour tout $a \in A$ il existe $b \in B$ tel que $a = g(b)$, et $g(f(g(b))) = g(b)$; alors $g(f(a)) = g(f(g(b))) = g(b) = a$ pour tout $a \in A$, donc $g \circ f = Id_A$.

**Remarques :**

$(a)$ Certains ont voulu “prouver” que $f$ et $g$ sont des bijections inverses l'une de l'autre, c.-à-d. $g \circ f = Id_A$ et $f \circ g = Id_B$. Cela n'est pas nécessairement vrai, par exemple les applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto 2n$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto \lfloor n/2 \rfloor$ satisfont les propriétés de l'énoncé, mais ne sont pas bijectives.

$(b)$ L'énoncé prouvé en TD :

> “$f : A \to B$ est injective si et seulement s'il existe une application $g : B \to A$ telle que $g \circ f = Id_A$”

permet de prouver que $(iii) \implies (i)$ mais pas que $(i) \implies (iii)$. En effet, rien ne dit que l'application $g$ de cet énoncé (qu'en TD nous avons construite à partir de $f$) soit la même que celle donnée dans cet exercice-ci. C'est le même faux raisonement que dans la déduction fictive ci-dessous :

> Tout Français a un cousin Belge.
> Martin est Français, Durand est son cousin.
> Donc Durand est Belge.

En effet, il se peut bien que Durand soit Français, mais que Martin ait un autre cousin, Vandeputte, qui soit Belge. On dira la même chose pour l'énoncé :

> “$g : B \to A$ est surjective si et seulement s'il existe une application $f : A \to B$ telle que $g \circ f = Id_A$”

qui prouve que $(iii) \implies (ii)$ mais pas que $(ii) \implies (iii)$.

$(c)$ On peut en fait montrer que pour $f : A \to B$ et $g : B \to A$, les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :

$(i)$ $f$ est injective et $f \circ g \circ f = f$.
$(ii)$ $g$ est surjective et $g \circ f \circ g = g$.
$(iii)$ $g \circ f = Id_A$.

**(2)** Voici deux preuves que ce nombre vaut $2^{a+b} - 2^a - 2^b + 1 = (2^a - 1)(2^b - 1)$ :

**1ère preuve :** Pour $X \subseteq A \cup B$, on a $X \cap A = \emptyset \Leftrightarrow X \subseteq B$ et $X \cap B = \emptyset \Leftrightarrow X \subseteq A$. Donc

$$\{X \subseteq A \cup B \mid X \cap A \neq \emptyset,\ X \cap B \neq \emptyset\} = \mathcal{P}(A \cup B) \setminus \left[\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)\right] \ .$$

On a $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B) = \{\emptyset\}$. La formule d'inclusion-exclusion donne

$$card\big(\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)\big) = card\big(\mathcal{P}(A)\big) + card\big(\mathcal{P}(B)\big) - card\big(\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)\big) = 2^a + 2^b - 1 \ ,$$

et comme $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$, on obtient

$$\begin{aligned} card\Big(\mathcal{P}(A \cup B) \setminus \left[\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)\right]\Big) &= card\big(\mathcal{P}(A \cup B)\big) - card\big(\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)\big) \\ &= 2^{a+b} - (2^a + 2^b - 1) = (2^a - 1)(2^b - 1) \ . \end{aligned}$$

**2ème preuve :** On a une bijection entre $\mathcal{P}(A \cup B)$ et $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ donnée par

$$\begin{aligned} &f : \mathcal{P}(A \cup B) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) : X \mapsto (X \cap A, X \cap B) \ , \\ &g : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A \cup B) : (X_A, X_B) \mapsto X_A \cup X_B \ . \end{aligned}$$

En effet, pour $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$, on a

$$g(f(X)) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = X \cap (A \cup B) = X \ ,$$

tandis que pour $(X_A, X_B) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, on a

$$\begin{aligned} f(g(X_A, X_B)) &= \big((X_A \cup X_B) \cap A, (X_A \cup X_B) \cap B\big) \\ &= \big((X_A \cap A) \cup (X_B \cap A), (X_A \cap B) \cup (X_B \cap B)\big) = (X_A \cup \emptyset, \emptyset \cup X_B) = (X_A, X_B) \ . \end{aligned}$$

Donc $g \circ f$ et $f \circ g$ donnent l'identité, et ainsi $f$ et $g$ sont des bijections inverses l'une de l'autre. Pour $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$, on a $X \cap A \neq \emptyset$ et $X \cap B \neq \emptyset$ ssi $f(X) = (X \cap A, X \cap B) \in \left[\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}\right] \times \left[\mathcal{P}(B) \setminus \{\emptyset\}\right]$. Ainsi

$$\begin{aligned} card\Big(\{X \subseteq A \cup B \mid X \cap A \neq \emptyset,\ X \cap B \neq \emptyset\}\Big) &= card\Big(\left[\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}\right] \times \left[\mathcal{P}(B) \setminus \{\emptyset\}\right]\Big) \\ &= card\big(\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}\big) \cdot card\big(\mathcal{P}(B) \setminus \{\emptyset\}\big) = (2^a - 1)(2^b - 1) \ . \end{aligned}$$

**(3)** $(a)$ On dessinera les axes $x$ et $y$, un point de coordonnées $(x, y)$, son symétrique $(-x, y)$ par rapport à l'axe des $y$, son symétrique $(x, -y)$ par rapport à l'axe des $x$, et enfin des flèches de $(x, y)$ à $(-x, y)$ et à $(x, -y)$. On voit alors que $S$ est la disjonction des deux symétries par rapport aux deux axes.

$(b)$ : $S$ est la disjonction de deux symétries, elle est symétrique. On vérifie que

$$\begin{aligned} &\left[(x, y)\ S\ (x', y')\right] \iff \left[(x', y') = (-x, y) \quad \text{ou} \quad (x', y') = (x, -y)\right] \\ &\iff \left[(x, y) = (-x', y') \quad \text{ou} \quad (x, y) = (x', -y')\right] \iff \left[(x', y')\ S\ (x, y)\right] \ . \end{aligned}$$

Cela se voit aussi sur le graphique $(a)$.

$(c)$ : On a $(x,y)\ S^2\ (x',y')$ ss'il existe $(x'',y'') \in \mathbb{R}^2$ avec $(x,y)\ S\ (x'',y'')$ et $(x'',y'')\ S\ (x',y')$. Cela donne

$$\big[(x'',y'') = (-x,y) \quad \text{ou} \quad (x'',y'') = (x,-y)\big]$$

et

$$\big[(x',y') = (-x'',y'') \quad \text{ou} \quad (x',y') = (x'',-y'')\big] \ .$$

On obtient 4 possibilités :

$$\begin{aligned}
(x'',y'') &= (-x,y) \quad \text{et} \quad (x',y') = (-x'',y'') \ , \\
(x'',y'') &= (x,-y) \quad \text{et} \quad (x',y') = (-x'',y'') \ , \\
(x'',y'') &= (-x,y) \quad \text{et} \quad (x',y') = (x'',-y'') \ , \\
(x'',y'') &= (x,-y) \quad \text{et} \quad (x',y') = (x'',-y'') \ .
\end{aligned}$$

Les 1er et 4ème cas donnent $(x',y') = (x,y)$, tandis que les 2ème et 3ème donnent$(x',y') = (-x,-y)$. Donc

$$\big[(x,y)\ S^2\ (x',y')\big] \iff \big[(x',y') = (x,y) \quad \text{ou} \quad (x',y') = (-x,-y)\big] \ .$$

On peut aussi obtenir ce résultat au moyen du graphique $(a)$.

$(d)$ : On a

$$\begin{aligned}
\big[(x,y)\ S \cup S^2\ (x',y')\big] \iff \big[&(x',y') = (x,y) \quad \text{ou} \quad (x',y') = (-x,y) \\
&\text{ou} \quad (x',y') = (x,-y) \quad \text{ou} \quad (x',y') = (-x,-y)\big] \ ,
\end{aligned}$$

c.-à-d.

$$\big[(x,y)\ S \cup S^2\ (x',y')\big] \iff (|x'|,|y'|) = (|x|,|y|) \ .$$

Dans le graphique $(a)$, cela signifie que $(x,y)$ et $(x',y')$ sont symétriques par rapport à un des deux axes $x$ ou $y$, ou par rapport à l'origine. Sous cette forme, on voit facilement que $S \cup S^2$ est une relation d'équivalence, en particulier elle est transitive. Comme la fermeture transitive $S^+$ de $S$ doit contenir $S$ et $S^2$, on en déduit que $S \cup S^2$ est cette fermeture transitive.

On peut aussi montrer que $S^3 = S$ (en appliquant la même méthode qu'en $(c)$, avec $(x,y)\ S^2\ (x'',y'')$ et $(x'',y'')\ S\ (x',y')$). On en déduite alors que $S^4 = S^2$, $S^5 = S$, etc., donc pour $n \geq 1$, $S^n = S$ pour $n$ impair et $S^n = S^2$ pour $n$ pair. Alors

$$S^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} S^n = S \cup S^2 \cup S^3 \cup S^4 \cup \cdots = S \cup S^2 \ .$$