L3I COMBINATOIRE — 8 : COMBINATOIRE ENUMERATIVE

Christian RONSE, ICube, Département d'Informatique de l'Université de Strasbourg

Nous allons donner des formules pour les cardinaux de divers types de combinaisons d'ensembles donnés ou de fonctions entre ces ensembles.

Le cardinal de la réunion de n ensembles mutuellement disjoints ($n \geq 2$) est la somme de leurs cardinaux respectifs :

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad (1 \leq i < j \leq n) \qquad \Longrightarrow \qquad card\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} card(A_i) \ .$$

Pour deux ensembles A et B on a :

$$\begin{aligned} & card(A \setminus B) = card(A) - card(A \cap B) \ , \\ B \subseteq A \quad \Longrightarrow \quad & card(A \setminus B) = card(A) - card(B) \ , \\ & card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B) \ , \\ & card(A \bigtriangleup B) = card(A) + card(B) - 2\, card(A \cap B) \ , \\ & card(A \times B) = card(A) \cdot card(B) \ , \\ & card(A^B) = card(A)^{card(B)} \ . \end{aligned}$$

Pour un naturel p, on a

$$card(A^p) = card(A)^p \ .$$

Donc pour $card(A) = n$, il y a n^p suites ordonnées $x_0, \ldots, x_{p-1}$ d'éléments de A. Une telle suite est appelée *arrangement avec répétitions* de p éléments parmi n ; le mot *arrangement* signifie que la suite est ordonnée, et le terme *avec répétitions* que les éléments de cette suite ne sont pas nécessairement distincts.

Comme $\mathcal{P}(A)$ est équipotent à 2^A (où $2 = \{0, 1\}$), on a

$$card\big(\mathcal{P}(A)\big) = 2^{card(A)} \ .$$

Le cardinal de la réunion de n ensembles non nécessairement disjoints ($n \geq 2$) est donnée par la *formule d'inclusion-exclusion* de Sylvester :

$$\begin{aligned} card\big(A_1 \cup \cdots \cup A_n\big) = & \sum_{i=1}^{n} card(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} card\big(A_{i_1} \cap A_{i_2}\big) \\ & + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} card\big(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}\big) - \ldots + (-1)^{n-1} card\big(A_1 \cap \cdots \cap A_n\big) \ . \end{aligned}$$

Si on écrit $\mathcal{P}(k, n)$ pour l'ensemble des parties de $\{1, \ldots, n\}$ de cardinal k, cette formule prend la forme :

$$card\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} \Big((-1)^{k-1} \sum_{P \in \mathcal{P}(k,n)} card\Big(\bigcap_{i \in P} A_i\Big)\Big) \ . \tag{1}$$

Cela donne pour $n = 2$:

$$card\big(A_1 \cup A_2\big) = card(A_1) + card(A_2) - card\big(A_1 \cap A_2\big) \ ,$$

pour $n = 3$:

$$\begin{aligned} card\big(A_1 \cup A_2 \cup A_3\big) = & \ card(A_1) + card(A_2) + card(A_3) - card\big(A_1 \cap A_2\big) - card\big(A_1 \cap A_3\big) \\ & - card\big(A_2 \cap A_3\big) + card\big(A_1 \cap A_2 \cap A_3\big) \ , \end{aligned}$$

et pour $n = 4$:

$$\begin{gathered} card\big(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4\big) = card(A_1) + card(A_2) + card(A_3) + card(A_4) \\ -card\big(A_1 \cap A_2\big) - card\big(A_1 \cap A_3\big) - card\big(A_1 \cap A_4\big) - card\big(A_2 \cap A_3\big) - card\big(A_2 \cap A_4\big) - card\big(A_3 \cap A_4\big) \\ +card\big(A_1 \cap A_2 \cap A_3\big) + card\big(A_1 \cap A_2 \cap A_4\big) + card\big(A_1 \cap A_3 \cap A_4\big) + card\big(A_2 \cap A_3 \cap A_4\big) \\ -card\big(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4\big) \ . \end{gathered}$$

Cette formule est prouvée par récurrence sur n. Pour $n = 1$, elle donne $card(A_1) = card(A_1)$. Pour $n = 2$, on a $A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus [A_1 \cap A_2])$ et $A_1 \cap (A_2 \setminus [A_1 \cap A_2]) = \emptyset$, avec $A_1 \cap A_2 \subseteq A_2$, donc

$$\begin{aligned} card\big(A_1 \cup A_2\big) &= card\big(A_1 \cup (A_2 \setminus [A_1 \cap A_2])\big) = card(A_1) + card\big(A_2 \setminus [A_1 \cap A_2]\big) \\ &= card(A_1) + card(A_2) - card\big(A_1 \cap A_2\big) \ . \end{aligned}$$

Supposons la formule vraie pour n, montrons-la pour $n + 1$. La formule pour $n = 2$ donne

$$card\Big(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\Big) = card\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) + card(A_{n+1}) - card\Big(\Big[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big] \cap A_{n+1}\Big) \ . \tag{$*$}$$

La formule pour n donne (1), et comme $\Big[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big] \cap A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n} [A_i \cap A_{n+1}]$, la formule pour n donne

$$\begin{aligned} -card\Big(\Big[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big] \cap A_{n+1}\Big) &= -card\Big(\bigcup_{i=1}^{n} [A_i \cap A_{n+1}]\Big) \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \Big((-1)^{k-1} \sum_{P \in \mathcal{P}(k,n)} card\Big(\bigcap_{i \in P} [A_i \cap A_{n+1}]\Big)\Big) \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \Big((-1)^{k-1} \sum_{P \in \mathcal{P}(k,n)} card\Big(\bigcap_{i \in P \cup \{n+1\}} A_i\Big)\Big) \\ \text{[posons } j = k+1\text{]} \qquad &= \sum_{j=2}^{n+1} \Big((-1)^{j-1} \sum_{P \in \mathcal{P}(j-1,n)} card\Big(\bigcap_{i \in P \cup \{n+1\}} A_i\Big)\Big) \ . \end{aligned}$$

L'unique élément de $\mathcal{P}(1, n+1) \setminus \mathcal{P}(1, n)$ est $\{n+1\}$, tandis que pour $j \geq 2$, $\mathcal{P}(j, n+1) \setminus \mathcal{P}(j, n)$ est formé des $P \cup \{n+1\}$ pour $P \in \mathcal{P}(j-1, n)$. De plus, $\mathcal{P}(n+1, n) = \emptyset$. Donc $(*)$ devient :

$$\begin{aligned} card\Big(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\Big) &= \sum_{k=1}^{n} \Big((-1)^{k-1} \sum_{P \in \mathcal{P}(k,n)} card\Big(\bigcap_{i \in P} A_i\Big)\Big) \\ &+ \sum_{P \in \mathcal{P}(1,n+1) \setminus \mathcal{P}(1,n)} card\Big(\bigcap_{i \in P} A_i\Big) + \sum_{j=2}^{n+1} \Big((-1)^{j-1} \sum_{P \in \mathcal{P}(j,n+1) \setminus \mathcal{P}(j,n)} card\Big(\bigcap_{i \in P} A_i\Big)\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \Big((-1)^{k-1} \sum_{P \in \mathcal{P}(k,n)} card\Big(\bigcap_{i \in P} A_i\Big)\Big) + \sum_{j=1}^{n+1} \Big((-1)^{j-1} \sum_{P \in \mathcal{P}(j,n+1) \setminus \mathcal{P}(j,n)} card\Big(\bigcap_{i \in P} A_i\Big)\Big) \\ \text{[remplaçons } k \text{ par } j\text{]} \qquad &= \sum_{j=1}^{n+1} \Big((-1)^{j-1} \sum_{P \in \mathcal{P}(j,n+1)} card\Big(\bigcap_{i \in P} A_i\Big)\Big) \ , \end{aligned}$$

c.-à-d. la formule (1) pour $n + 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $n!$, la *factorielle* de n, par récurrence :

$$\begin{gathered} 0! = 1 \ , \\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n+1)! = (n+1) \cdot n! \ . \end{gathered}$$

Donc $1! = 0! = 1$ et pour $n > 1$ on a $n! = 2 \cdots n = \prod_{k=2}^{n} k$.

Soient $p, n \in \mathbb{N}$. On note A_n^p le nombre d'injections d'un ensemble A de cardinal p vers un ensemble B de cardinal n. En particulier, pour $A = \{0, \ldots, p-1\}$, une telle injection correspond à une suite ordonnée $x_0, \ldots, x_{p-1}$ d'éléments mutuellement distincts de B. Une telle suite est appelée *arrangement sans répétition* de p éléments parmi n ; le terme *sans répétition* signifie que les éléments de cette suite sont deux à deux distincts.

Par définition, $A_n^p = 0$ pour $p > n$. Sinon :

Proposition : *Pour* $0 \leq p \leq n$,

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \quad . \tag{2}$$

On le montre par récurrence sur p. Soient A et B tels que $card(A) = p$ et $card(B) = n$. Si $p = 0$, l'unique injection $A \to B$ est vide, et on a $n!/(n-p)! = n!/n! = 1$. Supposons que le résultat soit vrai pour p, montrons-le pour $p+1$ (avec $n \geq p+1$). Soit $card(A) = p+1$, et prenons $x \in A$; pour une injection $f : A \to B$, si $y = f(x)$, la restriction de f à $A \setminus \{x\}$ est une injection $A \setminus \{x\} \to B \setminus \{y\}$, et réciproquement, toute injection $g : A \setminus \{x\} \to B \setminus \{y\}$ est la restriction à $A \setminus \{x\}$ d'une unique injection $f : A \to B$ telle que $y = f(x)$. Donc le nombre de choix possibles pour f est le nombre de choix pour $y = f(x)$ multiplié par le nombre d'injections $A \setminus \{x\} \to B \setminus \{y\}$, avec $card(A \setminus \{x\}) = p$ et $card(B \setminus \{y\}) = n - 1$, c.-à-d. $A_n^{p+1} = n \times A_{n-1}^p = n \times (n-1)!/([n-1]-p)! = n!/(n-[p+1])!$.

Corollaire : *Soient A et B deux ensembles avec $card(A) = card(B) = n$. Alors le nombre de bijections $A \to B$ est $A_n^n = n!$.*

En effet, cela correspond au cas où $p = n$, donc $n!/(n-p)! = n!/0! = n!$. On appelle une *permutation de A* une bijection $A \to A$; on précise parfois que c'est une *permutation sans répétition.*

Corollaire : *Soit A un ensemble avec $card(A) = n$. Alors le nombre de permutations de A est $n!$.*

On a la formule de récurrence pour $n > 0$ et $0 \leq p \leq n$:

$$A_n^p = p\, A_{n-1}^{p-1} + A_{n-1}^p \quad . \tag{3}$$

Notons d'abord que pour $p = 0$, elle prend la forme $A_n^0 = 0\, A_{n-1}^{-1} + A_{n-1}^0 = A_{n-1}^0$, qui est vraie parce que $A_n^0 = A_{n-1}^0 = 1$. Ensuite pour $p = n$, elle devient $A_n^n = n\, A_{n-1}^{n-1} + A_{n-1}^n$, qui est vraie parce que $A_n^n = n!$, $A_{n-1}^{n-1} = (n-1)!$ et $A_{n-1}^n = 0$. Enfin pour $0 < p < n$ on peut l'obtenir à partir de (2).

On peut également prouver (3) par raisonnement. Soient A, B tels que $card(A) = p$ et $card(B) = n$, et soit $x \in B$. Une injection $f : A \to B$ se retrouve dans un des deux cas suivants :

— $x \notin Im(f)$, donc f est une injection $A \to B \setminus \{x\}$, et on a A_{n-1}^p choix pour f.

— $x = f(y)$ pour un $y \in A$, donc f est formée du couple (y, x) et d'une injection $g : A \setminus \{y\} \to B \setminus \{x\}$; on a p choix pour y, et pour chaque choix de y on a encore A_{n-1}^{p-1} choix pour g.

En additionnant les deux, on obtient (3).

Le *coefficient binomial de p dans n*, qu'on écrit C_n^p (notation française) ou $\binom{n}{p}$ (notation anglo-saxonne), est le nombre de parties de cardinal p d'un ensemble de cardinal n :

$$card(E) = n : \qquad \binom{n}{p} = C_n^p = card\big(\{X \in \mathcal{P}(E) \mid card(X) = p\}\big) \quad .$$

Un tel sous-ensemble $\{x_0, \ldots, x_{p-1}\}$ d'éléments mutuellement distincts de B est appelé *combinaison sans répétition* de p éléments parmi n ; le mot *combinaison* signifie que la suite $x_0, \ldots, x_{p-1}$ n'est pas ordonnée.

Par définition, $\binom{n}{p} = 0$ si $p > n$ ou $p < 0$. Sinon :

Proposition: *Pour* $0 \leq p \leq n$,

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \ . \tag{4}$$

En effet, soient A et B deux ensembles tels que $card(A) = p$ et $card(B) = n$. A toute injection $f : A \to B$ on associe son image $Im(f)$, qui est une partie de B de cardinal p. Etant donnée une partie C de B de cardinal p, toute injection $f : A \to B$ telle que $Im(f) = C$ est en fait une bijection $A \to C$. Comme il y a $\binom{n}{p}$ choix pour une telle partie C, $p!$ bijections $A \to C$ et $A_n^p = n!/(n-p)!$ injections $A \to B$, on en déduit que $n!/(n-p)! = \binom{n}{p} \times p!$, c.-à-d. la formule (4).

Soit E un ensemble de cardinal n. L'application $\mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) : A \mapsto A^c = E \setminus A$ induit une bijection entre les parties de cardinal p et celles de cardinal $n-p$, puisque $card(E \setminus A) = n - card(A)$; donc

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \ .$$

On peut aussi obtenir cette égalité par la formule (4). Comme E contient une unique partie vide et n singletons, on a

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \ , \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \ .$$

On a la formule de récurrence pour $n > 0$ et $0 \leq p \leq n$:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \ . \tag{5}$$

Notons d'abord que pour $p = 0$, elle prend la forme $\binom{n}{0} = \binom{n-1}{-1} + \binom{n-1}{0}$, qui est vraie parce que $\binom{n}{0} = \binom{n-1}{0} = 1$ et $\binom{n-1}{-1} = 0$. Ensuite pour $p = n$, elle devient $\binom{n}{n} = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1}{n}$, qui est vraie parce que $\binom{n}{n} = \binom{n-1}{n-1} = 1$ et $\binom{n-1}{n} = 0$. Enfin pour $0 < p < n$ on a

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} \\ &= \frac{(n-1)! \times p}{p!(n-p)!} + \frac{(n-1)! \times (n-p)}{p!(n-p)!} = \frac{(n-1)! \times n}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p} \ .\end{aligned}$$

On peut aussi prouver (5) par raisonnement. Pour $card(E) = n$ et $x \in E$, les $\binom{n}{p}$ parties de E de cardinal p se partitionnent en deux sortes :

— celles qui ne contiennent pas x ; ce sont des parties de cardinal p de $E \setminus \{x\}$ (de cardinal $n-1$), il y en a donc $\binom{n-1}{p}$.

— celles qui contiennent x ; elles sont de la forme $\{x\} \cup X$, où X est une partie de cardinal $p-1$ de $E \setminus \{x\}$ (de cardinal $n-1$), il y en a donc $\binom{n-1}{p-1}$.

En additionnant les deux, on obtient (5).

On peut ainsi faire un tableau où $\binom{n}{p}$ est placé dans la case à l'intersection de la n-ième ligne et de la p-ième colonne, et la formule (5) veut dire que la valeur dans une case est la somme des valeurs des deux cases au dessus et au dessus à gauche, c.-à-d. on a

a	b
	$a+b$

Cela donne pour $p, n = 0, \ldots, 5, \ldots$:

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	$\ldots$
0	1	0	0	0	0	0	$\ldots$
1	1	1	0	0	0	0	$\ldots$
2	1	2	1	0	0	0	$\ldots$
3	1	3	3	1	0	0	$\ldots$
4	1	4	6	4	1	0	$\ldots$
5	1	5	10	10	5	1	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$	$\ddots$			$\ldots$

Les valeurs 0 correspondent au cas où $p > n$. On peut disposer les cases correspondant au cas $p \leq n$ dans un triangle, comme suit :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

C'est le *triangle de Pascal*. Ici chaque extrémité gauche ou droite d'une ligne a la valeur 1, et chaque nombre qui n'est pas une telle extrémité est égal à la somme des deux nombres au dessus de lui, c.-à-d. on a

$$\begin{array}{ccc} a & & b \\ & a+b & \end{array}$$

Soient X et Y deux variables et $n \in \mathbb{N}$. Alors on a l'*identité binomiale* de Newton :

$$(X+Y)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} X^p Y^{n-p} \quad . \tag{6}$$

Elle est prouvée par récurrence sur n. Pour $n = 0$, elle donne $(X+Y)^0 = \binom{0}{0} X^0 Y^0$ qui est vraie, car $(X+Y)^0 = X^0 = Y^0 = \binom{0}{0} = 1$. Supposons-la vraie pour n, et vérifions-la pour $n+1$:

$$\begin{aligned}(X+Y)^{n+1} &= (X+Y) \cdot (X+Y)^n = (X+Y) \Big(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} X^p Y^{n-p} \Big) \\ &= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} X^{p+1} Y^{n-p} + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} X^p Y^{n+1-p} \quad .\end{aligned} \tag{$**$}$$

En posant $q = p+1$ et utilisant $\binom{n}{-1} = 0$, on a

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} X^{p+1} Y^{n-p} = \sum_{q=1}^{n+1} \binom{n}{q-1} X^q Y^{n+1-q} = \sum_{q=0}^{n+1} \binom{n}{q-1} X^q Y^{n+1-q} \quad .$$

Comme $\binom{n}{n+1} = 0$, on a (en posant $q = p$)

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} X^p Y^{n+1-p} = \sum_{q=0}^{n+1} \binom{n}{q} X^q Y^{n+1-q} \quad .$$

Donc $(**)$ donne

$$\begin{aligned}(X+Y)^{n+1} &= \sum_{q=0}^{n+1} \binom{n}{q-1} X^q Y^{n+1-q} + \sum_{q=0}^{n+1} \binom{n}{q} X^q Y^{n+1-q} \\ &= \sum_{q=0}^{n+1} \left[\binom{n}{q-1} + \binom{n}{q} \right] X^q Y^{n+1-q} = \sum_{q=0}^{n+1} \binom{n+1}{q} X^q Y^{n+1-q} \quad ,\end{aligned}$$

c.-à-d. la formule (6) pour $n+1$.

Proposition: *Soient A et B deux ensembles avec $card(A)=a$, $card(B)=b$ et $a\geq b$. Alors le nombre de surjections $A\to B$ est*

$$\sum_{k=0}^{b}\Big((-1)^k\binom{b}{k}(b-k)^a\Big)\quad . \tag{7}$$

Ecrivons $B=\{x_1,\ldots,x_b\}$ et pour chaque $i=1,\ldots,b$, posons $F_i=\{f\in B^A\mid x_i\notin Im(f)\}$. Pour une partie P de $\{1,\ldots,n\}$, on a

$$\bigcap_{i\in P}F_i=\big\{f\in B^A\mid Im(f)\subseteq B\setminus\{x_i\mid i\in P\}\big\}\ ,$$

qui s'identifie à $\big(B\setminus\{x_i\mid i\in P\}\big)^A$, donc

$$card\Big(\bigcap_{i\in P}F_i\Big)=card\big(B\setminus\{x_i\mid i\in P\}\big)^{card(A)}=\big[b-card(P)\big]^a\ .$$

Donc pour $P\in\mathcal{P}(k,b)$ (c.-à-d. P de cardinal k), on obtient $(b-k)^a$. Alors la formule d'inclusion-exclusion (1) donne

$$card\Big(\bigcup_{i=1}^{b}F_i\Big)=\sum_{k=1}^{b}\Big((-1)^{k-1}\sum_{P\in\mathcal{P}(k,b)}card\Big(\bigcap_{i\in P}F_i\Big)\Big)$$

$$=\sum_{k=1}^{b}\Big((-1)^{k-1}\sum_{P\in\mathcal{P}(k,b)}(b-k)^a\Big)=\sum_{k=1}^{b}\Big((-1)^{k-1}\binom{b}{k}(b-k)^a\Big)\ .$$

Une fonction $f:A\to B$ n'est sont *pas* surjective ssi $Im(f)\neq B$, ssi $f\in F_i$ pour un $i=1,\ldots,b$, c.-à-d. ssi $f\in\bigcup_{i=1}^{b}F_i$. Donc l'ensemble des surjections $A\to B$ est $B^A\setminus\Big(\bigcup_{i=1}^{b}F_i\Big)$, et son cardinal vaut

$$b^a-\sum_{k=1}^{b}\Big((-1)^{k-1}\binom{b}{k}(b-k)^a\Big)=(-1)^0\binom{b}{0}(b-0)^a+\sum_{k=1}^{b}\Big((-1)^{k}\binom{b}{k}(b-k)^a\Big)\ ,$$

ce qui donne (7).

Proposition: *Soit A un ensemble avec $card(A)=m>0$ et soit $k\in\mathbb{N}$. Alors le nombre de fonctions $f:A\to\mathbb{N}$ telles que $\sum_{p\in A}f(p)=k$ est $\binom{k+m-1}{k}=\binom{k+m-1}{m-1}$.*

En effet, on peut écrire $A=\{p_1,\ldots,p_m\}$, et une telle fonction $f:A\to\mathbb{N}$ peut être codée comme un mot formé de croix $\times$ et de séparateurs $|$ comme suit : $f(p_1)$ fois $\times$, puis 1 fois $|$, puis $f(p_2)$ fois $\times$, puis 1 fois $|$, etc., et finalement $f(p_m)$ fois $\times$. On écrit cela $\times^{f(p_1)}\cdot\prod_{j=2}^{m}\big(\,|\,\cdot\times^{f(p_j)}\big)$. Un tel mot comporte $m-1$ occurrences de $|$ et $\sum_{j=1}^{m}f(p_j)=k$ occurrences de $\times$, il est de longueur $k+m-1$. Réciproquement, tout mot ayant $m-1$ occurrences de $|$ et k occurrences de $\times$ code une et une seule fonction f avec $\sum_{p\in A}f(p)=k$. Il faut donc compter le nombre de tels mots, il y a en fait $\binom{k+m-1}{m-1}$ choix pour les positions des occurrences de $|$, ou de façon équivalente, $\binom{k+m-1}{k}$ choix pour les positions des occurrences de $\times$.

Par exemple, pour $m=5$, $k=4$, $f(p_1)=0$, $f(p_2)=0$, $f(p_3)=2$, $f(p_4)=0$ et $f(p_5)=2$, le codage sera $|\ |\ \times\ \times\ |\ |\ \times\ \times$.

Ce résultat permet de donner le nombre de monômes de degré k en m variables :

$$\prod_{j=1}^{m}X_j^{n_j}\qquad\text{avec}\qquad\sum_{j=1}^{m}n_j=k\ .$$

Un *multi-ensemble* est une variante d'ensemble, où chaque élément a une multiplicité. Il y a donc $\binom{k+m-1}{k} = \binom{k+m-1}{m-1}$ multi-ensembles de cardinal k formés d'éléments d'un ensemble de cardinal m. Un tel multi-ensemble s'écrit $\{x_0, \ldots, x_{k-1}\}$, où certains éléments x_i peuvent être répétés ; il est aussi appelé *combinaison avec répétitions* de k éléments parmi m.

Etant donnée une fonction $E \to V$, où E est fini, l'*histogramme* de f est la fonction $h_f : V \to \mathbb{N}$ donnée par

$$\forall v \in V, \qquad h_f(v) = card\big(\{p \in E \mid f(p) = v\}\big) \ ,$$

et cette fonction h_f vérifie $\sum_{v \in V} h_f(v) = card(E)$. Pour $card(E) = e$ et $card(V) = v$, il y a en tout $\binom{e+v-1}{e} = \binom{e+v-1}{v-1}$ histogrammes différents.

Par exemple si on a une promotion de 80 étudiants, et que la note d'examen est un entier entre 0 et 20, cela donne $e = 80$ et $v = 21$, donc $\binom{100}{20}$ histogrammes de notes possibles.

Soient $m \geq 2$, $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{N}$ et $n = b_1 + \cdots b_m$; on appelle *coefficient multinomial de* $b_1, \ldots, b_m$ *dans* n, et on écrit $\binom{n}{b_1, \ldots, b_m}$, le nombre d'applications $f : A \to \{1, \ldots, m\}$, pour $card(A) = n$, telles que pour $i = 1 \ldots, m$, on a $card(f^{-1}(\{i\})) = b_i$ (il y a b_i éléments x de A tels que $f(x) = i$). C'est également le nombre de $(m-1)$-uples $(B_1, \ldots, B_{m-1}) \in \mathcal{P}(A)^{m-1}$ tels que $card(B_i) = b_i$ pour $1 \leq i \leq m-1$, et $B_i \cap B_j = \emptyset$ pour $1 \leq i < j \leq m-1$. Notons que pour $m = 2$ on a

$$\binom{n}{p, n-p} = \binom{n}{p} \ .$$

Proposition : *Pour* $b_1 + \cdots + b_m = n$, *on a*

$$\binom{n}{b_1, \ldots, b_m} = \frac{n!}{b_1! \cdots b_m!} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^m b_i!} \ . \tag{8}$$

On la montre par récurrence sur m. Pour $m = 2$, il s'agit du nombre de parties de A de cardinal b_1, et la formule donne effectivement $\binom{n}{b_1, b_2} = \binom{n}{b_1}$. Maintenant, supposons la vraie pour m, et montrons-la pour $m+1$. Une application $f : A \to \{1, \ldots, m+1\}$ telle que $card(f^{-1}(\{i\})) = b_i$ pour $i = 1 \ldots, m+1$ est donnée par le choix d'une partie B de A de cardinal b_{m+1} sur laquelle $f(x) = m+1$, et ensuite d'une application $g : A \setminus B \to \{1, \ldots, m\}$ telle que $card(g^{-1}(\{i\})) = b_i$ pour $i = 1 \ldots, m$. Le nombre de choix est :

$$\binom{n}{b_{m+1}} \times \binom{n - b_{m+1}}{b_1, \ldots, b_m} = \frac{n!}{b_{m+1}!(n - b_{m+1})!} \times \frac{(n - b_{m+1})!}{\prod_{i=1}^m b_i!} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{m+1} b_i!} \ ,$$

ce qui donne la formule (8).

Etant donnés m symboles $x_1, \ldots, x_m$, le nombre de mots de longueur $n = b_1 + \cdots + b_m$ comprenant b_i occurrences du symbole x_i pour $i = 1, \ldots, n$, est $\binom{n}{b_1, \ldots, b_{m-1}}$. Un tel mot est appelé *permutation avec répétitions* de n éléments.

Le nombre total de $(m-1)$-uples $(B_1, \ldots, B_{m-1})$ de parties mutuellement disjointes de A, est égal au nombre d'applications $f : A \to \{1, \ldots, m\}$, à savoir m^n, en d'autres termes :

$$\sum_{b_1 + \ldots + b_m = n} \binom{n}{b_1, \ldots, b_m} = m^n \ .$$

On peut généraliser l'identité binomiale de Newton comme suit ; pour $m \geq 2$,

$$(X_1 + \cdots + X_m)^n = \sum_{b_1 + \cdots + b_m = n} \binom{n}{b_1, \ldots, b_m} X_1^{b_1} \cdots X_m^{b_m} \ . \tag{9}$$

Elle est prouvée par récurrence sur m. Pour $m = 2$, c'est l'identité binomiale. Supposons-la vraie pour m. Alors

$$
\begin{aligned}
&(X_1 + \cdots + X_{m+1})^n \\
&\quad = \big(X_1 + \cdots + (X_m + X_{m+1})\big)^n \\
&\quad = \sum_{b_1+\cdots+b_m=n} \binom{n}{b_1, \ldots, b_m} X_1^{b_1} \cdots X_{m-1}^{b_{m-1}} (X_m + X_{m+1})^{b_m} \\
&\quad = \sum_{b_1+\cdots+b_m=n} \binom{n}{b_1, \ldots, b_m} X_1^{b_1} \cdots X_{m-1}^{b_{m-1}} \left[\sum_{c+d=b_m} \binom{b_m}{c, d} X_m^c X_{m+1}^d \right] \\
&\quad = \sum_{b_1+\cdots+b_m=n} \sum_{c+d=b_m} \binom{n}{b_1, \ldots, b_m} \binom{b_m}{c, d} X_1^{b_1} \cdots X_{m-1}^{b_{m-1}} X_m^c X_{m+1}^d \\
&\quad = \sum_{b_1+\cdots+b_m=n} \sum_{c+d=b_m} \binom{n}{b_1, \ldots, b_{m-1}, c, d} X_1^{b_1} \cdots X_{m-1}^{b_{m-1}} X_m^c X_{m+1}^d \\
&\quad = \sum_{b_1+\cdots+b_{m-1}+c+d=n} \binom{n}{b_1, \ldots, b_{m-1}, c, d} X_1^{b_1} \cdots X_{m-1}^{b_{m-1}} X_m^c X_{m+1}^d \ ,
\end{aligned}
$$

ce qui donne (9).