L3I COMBINATOIRE — 6 : RELATIONS BINAIRES

Christian RONSE, ICube, Département d'Informatique de l'Université de Strasbourg

Une relation *binaire* est une relation entre deux ensembles A et B, c.-à-d. une partie de $A \times B$. Pour $A = B$, on parlera d'une relation *sur* A. Pour $a \in A$ et $b \in B$, le fait que $(a, b) \in R$ s'écrira $R(a, b)$ ou tout simplement $a\ R\ b$. On peut représenter une relation entre A et B en dessinant une flèche de a vers b pour tout couple $(a, b) \in R$. Si A et B sont des parties de $\mathbb{R}$, on peut aussi représenter les couples $(a, b) \in R$ comme points de $\mathbb{R}^2$, avec A sur l'axe des abcisses et B sur l'axe des ordonnées.

Etant donnée une relation $R \subseteq A \times B$, rappelons que la *négation* de R est la relation $\neg R = (A \times B) \setminus R = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B,\ (a, b) \notin R\}$. L'*inverse* de R est la relation $R^{-1} \subseteq B \times A$ définie par

$$\forall a \in A,\ \forall b \in B, \qquad \left[b\ R^{-1}\ a \iff a\ R\ b\right] .$$

Clairement, $(R^{-1})^{-1} = R$ et $(\neg R)^{-1} = \neg(R^{-1})$. Pour $R, S \subseteq A \times B$, $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$ et $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.

On dira qu'une relation $R \subseteq A \times B$ est :

— *totale à gauche* si $\forall a \in A,\ \exists b \in B$ tel que $a\ R\ b$.

— *totale à droite* si et seulement si $\forall b \in B,\ \exists a \in A$ tel que $a\ R\ b$.

Une relation est totale à droite ssi son inverse est totale à gauche.

La relation *identité* sur un ensemble A est $Id_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$, c.-à-d. pour $a, a' \in A$ on a $a\ Id_A\ a' \ \Leftrightarrow\ a = a'$. Elle est totale à droite et à gauche, et elle est sa propre inverse.

Etant données deux relations $R \subseteq A \times B$ et $S \subseteq B \times C$, la *composition* de R et S est la relation $RS \subseteq A \times C$ obtenue en composant les flèches de R avec celles de S ; en d'autres termes, RS est définie par

$$\forall a \in A,\ \forall c \in C, \qquad \Big(a\ RS\ c \iff \left[\exists b \in B,\ a\ R\ b \text{ et } b\ S\ c\right]\Big) .$$

Notons que si R et S sont des fonctions, on écrit la composition $S \circ R$, tandis qu'ici pour des relations nous l'écrivons RS ; en d'autres termes, la composition de fonctions s'écrit de droite à gauche, tandis que celle de relations s'écrit de gauche à droite. L'inverse de la composition de deux relations est la composition de leurs inverses dans l'ordre inverse : $(RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1}$. La composition distribue l'union : pour $R, R' \subseteq A \times B$ et $S, S' \subseteq B \times C$, on a $(R \cup R')S = (RS) \cup (R'S)$ et $R(S \cup S') = (RS) \cup (RS')$. La composition est associative : pour $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ et $T \subseteq C \times D$, on a $(RS)T = R(ST)$. Par ailleurs, l'identité est le neutre pour la composition : pour $R \subseteq A \times B$ on a $R = Id_A R = R Id_B$.

Pour $R \subseteq A \times B$ on a $Id_A \subseteq RR^{-1}$ ssi R est totale à gauche, et $Id_B \subseteq R^{-1}R$ ssi R est totale à droite.

Si A et B sont finis, on écrit $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ et $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$. Ainsi on peut représenter R par une matrice $n \times m$ donnée par

$$R_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i\ R\ b_j\ , \\ 0 & \text{sinon}\ , \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m.)$$

Alors la matrice de l'inverse R^{-1} est la transposée de celle de R, et la matrice de la composition RS est obtenue comme le produit matriciel booléen de celles de R et S :

$$RS_{i,k} = \sum_j R_{i,j} S_{j,k}\ ,$$

où la somme s'effectue au sens des opérations booléennes, c.-à-d. $1 + 1 = 1$.

Considérons maintenant une relation R sur un ensemble E. Nous écrirons Id pour Id_E. Pour tout naturel n, on définit la relation R^n sur E par récurrence :

$$R^0 = Id \ ,$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ R^{n+1} = RR^n \ .$$

Donc pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a\ R^n\ b$ si et seulement s'il existe une suite $a_0, \dots, a_n \in E$ telle que $a = a_0$, $b = a_n$, et $a_i\ R\ a_{i+1}$ pour $i = 0, \dots, n-1$. On vérifiera que pour $m, n \in \mathbb{N}$ on a $R^m R^n = R^{m+n}$. Par ailleurs $(R^{-1})^n = (R^n)^{-1}$, ce qui définit R^{-n} ; aussi $R^{-m}R^{-n} = R^{-(m+n)}$. Par contre $R^m R^{-n}$ et $R^{-n}R^m$ sont généralement différents de R^{m-n}, en particulier $R^n R^{-n}$ et $R^{-n}R^n$ sont différents de Id. Enfin on définit

$$R^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \qquad \text{et} \qquad R^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n = Id \cup R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots = Id \cup R^+ \ .$$

Donc $a\ R^+\ b$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a\ R^n\ b$, et $a\ R^*\ b$ si et seulement si $a = b$ ou $a\ R^+\ b$.

La relation R est *réflexive* si $Id \subseteq R$, c.-à-d. $\forall a \in E,\ a\ R\ a$, tandis qu'elle est *irréflexive* si $Id \cap R = \emptyset$, c.-à-d. $\forall a, b \in E,\ a\ R\ b \ \Rightarrow\ a \neq b$. Une relation R est irréflexive si et seulement si sa négation $\neg R$ est réflexive. Par exemple, l'égalité $=$ et l'ordre large $\leq$ (sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$) sont réflexifs, tandis que l'inégalité $\neq$ et l'ordre strict $>$ sont irréflexifs. Si R n'est pas réflexive, la plus petite relation réflexive contenant R est $Id \cup R$, donnée par $a\ (Id \cup R)\ b$ ssi $a = b$ ou $a\ R\ b$. Si R n'est pas irréflexive, la plus grande relation irréflexive contenue dans R est $R \setminus Id$, donnée par $a\ (R \setminus Id)\ b$ ssi $a\ R\ b$ et $a \neq b$. Cela donne ainsi une correspondance bijective entre les relations réflexives et irréflexives sur E : une relation réflexive R et une relation irréflexive S correspondent par $R = Id \cup S$ et $S = R \setminus Id$, en d'autres termes :

$$a\ R\ b \iff \big[a\ S\ b \quad \text{ou} \quad a = b\big] \qquad \text{et} \qquad a\ S\ b \iff \big[a\ R\ b \quad \text{et} \quad a \neq b\big] \ .$$

Ainsi l'ordre large $\leq$ et l'ordre strict $<$ (sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$), tout comme $\geq$ et $>$, correspondent de cette manière.

La relation R est *symétrique* si $R = R^{-1}$, c.-à-d. $\forall a, b \in E,\ a\ R\ b \ \Leftrightarrow\ b\ R\ a$ (en fait, il suffit de vérifier que $\forall a, b \in E,\ a\ R\ b \ \Rightarrow\ b\ R\ a$). La négation d'une relation symétrique est symétrique. Par exemple, l'égalité $=$ et l'inégalité $\neq$ sont symétriques. Si R n'est pas symétrique, la plus petite relation symétrique contenant R est $R \cup R^{-1}$, donnée par $a\ (R \cup R^{-1})\ b$ ssi $a\ R\ b$ ou $b\ R\ a$.

Les deux opérations $R \mapsto Id \cup R$ et $R \mapsto R \cup R^{-1}$, qui rendent une relation respectivement réflexive et symétrique, commutent, c.-à-d. en composant l'une suivie de l'autre dans n'importe quel ordre, on obtient le même résultat : $(Id \cup R) \cup (Id \cup R)^{-1} = Id \cup (R \cup R^{-1})$, c'est la plus petite relation réflexive et symétrique contenant R.

La relation R est *anti-symétrique* si $R \cap R^{-1} \subseteq Id$, c.-à-d.

$$\forall a, b \in E, \qquad \big[a\ R\ b \quad \text{et} \quad b\ R\ a\big] \implies a = b \ .$$

Par exemple, les ordres larges $\leq$ et $\geq$ (sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$) sont anti-symétriques.

La relation R est *transitive* si $R^2 \subseteq R$, c.-à-d.

$$\forall a, b, c \in E, \qquad \big[a\ R\ b \quad \text{et} \quad b\ R\ c\big] \implies a\ R\ c \ .$$

Par exemple, l'égalité $=$, l'ordre large $\leq$ et l'ordre strict $<$ (sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$) sont transitifs. Si R n'est pas transitive, la plus petite relation transitive contenant R est $R^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} R^n$, on l'appelle la *fermeture transitive* ou *clôture transitive* de R. Par exemple la fermeture transitive de la relation "enfant de" est la relation "descendant de", et celle de "parent de" est "ancêtre de"). La fermeture transitive d'une relation est obtenue en lui rajoutant sa composition avec elle-même, puis en répétant cela indéfiniment (cf. "les amis de mes amis sont mes amis, etc.").

Les opérations $R \mapsto Id \cup R$ et $R \mapsto R^+$ commutent, $(Id \cup R)^+ = Id \cup R^+ = R^*$, c'est la plus petite relation réflexive et transitive contenant R, on l'appelle la *fermeture (clôture) réflexive et transitive* de R.

Notons que si R est réflexive (resp., symétrique), sa fermeture transitive R^+ le sera aussi. Si R est symétrique, sa fermeture réflexive et transitive R^* le sera. Si R est symétrique et totale (à gauche ou à droite, c'est équivalent par symétrie), alors sa fermeture transitive R^+ sera réflexive et symétrique. Par exemple la relation sur $\mathbb{Z}$ donnée par $|a - b| = 4$ est symétrique et totale, sa fermeture transitive est la congruence modulo 4, une relation réflexive et symétrique.

Si E est fini, la fermeture transitive d'une relation binaire sur E peut s'obtenir avec une complexité en $|E|^3$ par l'algorithme de Floyd-Warshall. Soit $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et R une relation binaire sur E. On initialise la relation S par $S := R$, puis on fait la triple boucle :

Pour j allant de 1 à n faire
Pour i allant de 1 à n faire
Pour k allant de 1 à n faire
SI ($x_i\ S\ x_j$ ET $x_j\ S\ x_k$ ET $x_i \neg S\ x_k$) ALORS $S := S \cup \{(x_i, x_k)\}$.

A la fin, $S = R^+$, la fermeture transitive de R.