L3I COMBINATOIRE — 2 : FONCTIONS (APPLICATIONS)

Christian RONSE, ICube, Département d'Informatique de l'Université de Strasbourg

Une *fonction* ou *application* f de A dans B associe à tout $x \in A$ un unique $f(x) \in B$; on écrit donc $f : A \to B : x \mapsto f(x)$. On dit que A est l'*ensemble de départ* ou *domaine* de f, B est l'*ensemble d'arrivée* de f, et que $f(x)$ est l'*image de x par f*. Certains auteurs distinguent *fonction* et *application* dans le sens qu'une fonction $A \to B$ peut éventuellement n'être définie que sur une partie de A, tandis qu'une application $A \to B$ sera définie sur la totalité de A. J'appellerai une fonction définie sur une partie de A et à valeurs dans B une *fonction partiellement définie* $A \to B$.

L'application f est caractérisée par son *graphe*, qui est l'ensemble

$$\big\{\big(x, f(x)\big) \mid x \in A\big\} \ ;$$

c'est une partie de $A \times B$. Par exemple, si A, B sont des intervalles dans $\mathbb{R}$, le graphe de l'application correspond au graphique usuel dans $\mathbb{R}^2$ représentant celle-ci, avec A comme axe des abcisses, et B comme axe des ordonnées.

Les applications $A \to B$ constituent un ensemble, celui-ci est noté B^A. Si on identifie une application à son graphe, alors B^A devient un sous-ensemble de $\mathcal{P}(A \times B)$.

Considérons une application $f : A \to B$. L'*image* de f est l'ensemble $Im(f) = \{f(a) \mid a \in A\}$. Pour $X \subseteq A$, posons

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \ ;$$

on l'appelle l'*image de X par f*, en particulier $Im(f) = f(A)$. On a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} f(\emptyset) &= \emptyset \ , \\ f(A) &\subseteq B \ , \\ f\Big(\bigcup_{i \in I} X_i\Big) &= \bigcup_{i \in I} f(X_i) \ , \\ f\Big(\bigcap_{i \in I} X_i\Big) &\subseteq \bigcap_{i \in I} f(X_i) \ , \end{aligned}$$

mais il n'y a en général pas de relation entre $f(A \setminus X)$ et $B \setminus f(X)$. Pour $Y \subseteq B$, posons

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\} \ ;$$

on l'appelle l'*image inverse de Y par f*. On a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} f^{-1}(\emptyset) &= \emptyset \ , \\ f^{-1}(B) &= A \ , \\ f^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} Y_i\Big) &= \bigcup_{i \in I} f^{-1}(Y_i) \ , \\ f^{-1}\Big(\bigcap_{i \in I} Y_i\Big) &= \bigcap_{i \in I} f^{-1}(Y_i) \ , \\ f^{-1}(B \setminus Y) &= A \setminus f^{-1}(Y) \ . \end{aligned}$$

Une application $f : A \to B$ est *injective* si tout élément de B est l'image par f *d'au plus un* élément de A, c.-à-d.

$$\forall x, y \in A, \ \big(f(x) = f(y) \implies x = y\big) \ ;$$

par contraposition, $x \neq y \;\Rightarrow\; f(x) \neq f(y)$. Une application injective est appelée une *injection.* L'application f est *surjective* si tout élément de B est l'image par f *d'au moins un* élément de A, c.-à-d.

$$\forall y \in B,\ \exists x \in A,\ f(x) = y \ .$$

Une application surjective est appelée une *surjection.* L'application f est *bijective* si elle est à la fois injective et surjective, c.-à-d. tout élément de B est l'image par f *d'un et un seul* élément de A ; une application bijective est appelée une *bijection.* A toute bijection $f : A \to B$ correspond une bijection $g : B \to A$ qui est *l'inverse* de f, c.-à-d.

$$\forall x \in A,\ \forall y \in B,\ \big(y = f(x) \iff x = g(y)\big) \ .$$

On écrit alors f^{-1} pour la bijection inverse de f ; on a $(f^{-1})^{-1} = f$. Cette notation est consistante avec celle utilisée plus haut pour l'image inverse : étant données une bijection $f : A \to B$ et $Y \subseteq B$, $f^{-1}(Y) = \{f^{-1}(y) \mid y \in Y\}$, en particulier pour $y \in B$, $f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$.

Toute injection $f : A \to B$ induit une bijection $A \to Im(f)$; réciproquement, pour $B \subseteq B'$, toute bijection $f : A \to B$ peut être considérée comme une injection $A \to B'$.

L'*identité sur* A est l'application $Id_A : A \to A : x \mapsto x$; c'est une bijection, et elle est sa propre inverse.

Etant données deux applications $f : A \to B$ et $g : B \to C$, la *composition* de f suivie par g est l'aplication $g \circ f : A \to C : x \mapsto g(f(x))$. Pour que cette composition $g \circ f$ soit définie, il est nécessaire que l'ensemble d'arrivée de f coïncide avec l'ensemble de départ de g. Cette opération est associative : pour $f : A \to B$, $g : B \to C$ et $h : C \to D$, on a $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, c'est l'application $x \mapsto h(g(f(x)))$. Pour $f : A \to B$, on a $Id_B \circ f = f = f \circ Id_A$. Pour une bijection $f : A \to B$, on a $f^{-1} \circ f = Id_A$ et $f \circ f^{-1} = Id_B$.

La composition a les propriétés suivantes en ce qui concerne l'injectivité et la surjectivité ; soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$, alors :

- (a) Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- (b) Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- (c) Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- (d) Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Notons qu'en (c), g n'est pas nécessairement injective, et qu'en (d), f n'est pas nécessairement surjective. Prenons par exemple $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto 2x$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto \lfloor x/2 \rfloor$; alors $g \circ f = Id_{\mathbb{N}}$ (donc (c) et (d) sont satisfaits), f est injective mais pas surjective, g est surjective mais pas injective.

Pour $f : A \to B$ et $g : B \to A$, on dit que g *est inverse à gauche de* f, ou que f *est inverse à droite de* g, si $g \circ f = Id_A$. On a alors les caractérisations suivantes :

- (i) Une application f est injective ssi elle a une application g inverse à gauche ; g sera nécessairement surjective (mais pas nécessairement unique).
- (ii) Une application f est surjective ssi elle a une application g inverse à droite ; g sera nécessairement injective (mais pas nécessairement unique).
- (ii) Une application f est bijective ssi elle a à la fois une application g inverse à gauche et une application h inverse à droite ; alors les inverses g à gauche et h à droite seront toutes deux égales à la bijection inverse f^{-1}.

Donc il y a une injection $A \to B$ ssi il y a une surjection $B \to A$. Par ailleurs, pour que $f : A \to B$ et $g : B \to A$ forment deux bijections inverses l'une de l'autre, il est nécessaire et suffisant d'avoir $g \circ f = Id_A$ et $f \circ g = Id_B$ (c.-à-d. f et g sont mutuellement inverses à gauche et à droite). C'est un critère pratique pour prouver que deux applications sont des bijections inverses l'une de l'autre.