Université de Strasbourg **UFR de Mathématique et d'Informatique**
Informatique L2 S4, L3 S5 et L3 CMI **2018-2019, semestre d'automne**

Probabilités, Statistiques et Combinatoire

Contrôle Continu de Combinatoire, 25 octobre 2018

Durée : 1 heure

Responsable : Prof. Christian RONSE

Tous documents (papier) autorisés mais non partagés — Calculettes inutiles

Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifiez soigneusement vos réponses !

(1) Un *mot de Lamé* est un mot booléen (chaîne de symboles 0 ou 1) où n'apparaissent pas plusieurs symboles 0 consécutifs. Par exemple $'10110'$ est un mot de Lamé de longueur 5 (les 0 sont isolés), tandis que $'11001'$ n'en est pas un (à cause de deux 0 consécutifs). Soit L_n le nombre de mots de Lamé de longueur n.

(i) Donner tous les mots de Lamé de longueur 0, 1 et 2, puis les valeurs de L_0, L_1 et L_2.

(ii) On considère un mot de Lamé de longueur $n+2$ se terminant par le symbole 1, c.-à-d. de la forme $'a_1 \cdots a_{n+1}1'$, avec $a_i \in \{0,1\}$ pour $i = 1, \ldots, n+1$. Quelles sont les contraintes sur les occurrences du symbole 0 parmi les $n+1$ premiers symboles $a_1, \ldots, a_{n+1}$?

(iii) Même question pour un mot de Lamé de longueur $n+2$ se terminant par le symbole 0, $'a_1 \cdots a_{n+1}0'$.

(iv) Montrer qu'il y a L_{n+1} mots de Lamé de longueur $n+2$ se terminant par le symbole 1.

(v) Montrer qu'il y a L_n mots de Lamé de longueur $n+2$ se terminant par le symbole 0.

(vi) Exprimer L_{n+2} en fonction de L_{n+1} et L_n.

(vii) On la suite de Fibonacci F_n, donnée par la récurrence $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, avec $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, etc. Exprimer L_n en termes des F_m.

(2) Soit R une relation sur un ensemble E et soit R^+ sa fermeture transitive. Montrer que si R^+ est réflexive et anti-symétrique, alors R est réflexive. *Indication :* utiliser la décomposition de R^+ comme union des puissances de R, c.-à-d. $R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$.