UFR de Mathématiques et d'Informatique
L3 Informatique S5, 2016-2017, semestre de printemps

Probabilités, Statistiques et Combinatoire

Contrôle Continu de Combinatoire, 27 février 2017

Durée : 1 heure

Tous documents (papier) autorisés mais non partagés
Calculettes inutiles
Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifier soigneusement les réponses

(1) Une association assure 9 jours de permanence avec l'aide de 3 bénévoles, Jules, Marie et Pierre. Donner le nombre de répartitions possibles des 9 jours entre les 3 bénévoles dans chacun des cas suivants :

(i) Jules assure 3 jours, Marie assure 4 jours et Pierre assure 2 jours.

(ii) Jules assure 3 jours, Marie assure 4 jours et Pierre assure 2 jours *consécutifs*.

(iii) Jules assure *au maximum* 4 jours, Marie assure *au maximum* 5 jours et Pierre assure *exactement* 2 jours.

NB. Dans chaque cas, il suffit de donner les formules, il n'est pas nécessaire d'en calculer la valeur arithmétique.

(2) Soit E un ensemble *fini* et soit $f : E \to E$. Que peut-on dire de la hauteur $h(x)$ (pour f) d'un élément x de E quand f est injective ou surjective ?

(3) Soit Q un ensemble ordonné par la relation d'ordre large $\leq$, avec la relation d'ordre strict correspondante $<$. Soit P un ensemble et deux applications $f, g : P \to Q$. On définit la relation binaire $\prec$ sur P comme suit :

$$\forall x, y \in P, \qquad x \prec y \iff \Big(\; f(x) < f(y) \quad \text{OU} \quad \big[\, f(x) = f(y) \text{ ET } g(x) < g(y) \,\big] \; \Big) \ .$$

(i) Montrer que $\prec$ est une relation d'ordre strict sur P.

Soit $\preceq$ la relation d'ordre large correspondant à $\prec$, et soit $\models$ la relation sur P définie comme suit :

$$\forall x, y \in P, \qquad x \models y \iff \Big(\; f(x) < f(y) \quad \text{OU} \quad \big[\, f(x) = f(y) \text{ ET } g(x) \leq g(y) \,\big] \; \Big) \ .$$

(ii) Comparer $\preceq$ à $\models$; l'une est-elle incluse dans l'autre ?

(iii) Soient $x, y \in P$ tels que $x \neq y$, $f(x) = f(y)$ et $g(x) = g(y)$; comment x et y sont-ils liés pour les relations $\preceq$ et $\models$?