Université de Strasbourg **UFR de Mathématiques et Informatique**
L3 Informatique S5 et L3 CMI **2016-2017, semestre d'automne**

Probabilités, Statistiques et Combinatoire

Contrôle Continu de Combinatoire, 14 octobre 2016

Durée : 1 heure
Responsable : Prof. Christian RONSE
Tous documents (papier) autorisés mais non partagés
Calculettes inutiles
Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifiez soigneusement vos réponses !

(1) Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 4$; soit $\mathcal{X}$ l'ensemble de toutes les parties de E de cardinal 3 :

$$\mathcal{X} = \{A \subseteq E \mid card(A) = 3\} \ .$$

On définit la relation binaire $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{X}$ qui lie deux éléments de $\mathcal{X}$ si leur intersection est une paire :

$$\forall\, A, B \in \mathcal{X}, \qquad A\ \mathcal{S}\ B \iff card(A \cap B) = 2 \ .$$

Par exemple pour $a, b, c, d \in E$ mutuellement distincts, $\{a, b, c\}\ \mathcal{S}\ \{b, c, d\}$.
(a) Soient $A, B \in \mathcal{X}$; donner le plus petit $k > 0$ tel que $A\ \mathcal{S}^k\ B$ dans les cas suivants :
(i) $A = B$.
(ii) $n \geq 5$ et $card(A \cap B) = 1$.
(iii) $n \geq 6$ et $A \cap B = \emptyset$ (A et B sont disjoints).
(b) Pour $n \geq 6$, donner la décomposition la plus courte possible de $\mathcal{S}^*$, la fermeture réflexive et transitive de $\mathcal{S}$, en termes d'union de $\mathcal{S}^k$, $k \in \mathbb{N}$.

(2) Pour un naturel n, soit $f(n)$ le nombre d'affectations possibles de $2n$ journées de permanence à n bénévoles, où chaque bénévole assure 2 journées de permanence. Par exemple pour $n = 3$, une affectation possible est :
Jour 1 : Jules ; Jour 2 : Marie ; Jour 3 : Jules ; Jour 4 : Pierre ; Jour 5 : Pierre ; Jour 6 : Marie.
(i) Donner $f(0)$ et $f(1)$.
(ii) Exprimer $f(n+1)$ en fonction de n et $f(n)$.
(iii) Donner une formule pour $f(n)$, obtenue par récurrence sur n.

(3) On considère quatre applications $f, g, h, k : E \to E$. Si $f \circ g \circ h \circ f$ et $k \circ h \circ g \circ k$ sont des bijections, que peut-on dire de f, g, h et k ?