**UFR de Mathématiques et d'Informatique**
**L3 Informatique S5, 2015-2016, semestre de printemps**

**Probabilités, Statistiques et Combinatoire**

**Contrôle Continu de Combinatoire, 22 février 2016**

Durée : 1 heure

*Tous documents (papier) autorisés mais non partagés*
*Calculettes inutiles*
*Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé*

**Justifier soigneusement les réponses**

**(1)** Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n \geq 5$ ; soit $\mathcal{X}$ l'ensemble de toutes les parties de $E$ de cardinal 3 :

$$\mathcal{X} = \{A \subseteq E \mid card(A) = 3\} \ .$$

On définit la relation binaire $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{X}$ qui lie deux éléments de $\mathcal{X}$ si leur intersection est un singleton :

$$\forall\, A, B \in \mathcal{X}, \qquad A\ \mathcal{S}\ B \iff card(A \cap B) = 1 \ .$$

Par exemple pour $a, b, c, d, e \in E$ mutuellement distincts, $\{a, b, c\}\ \mathcal{S}\ \{a, d, e\}$.

($i$) Pour $A \in \mathcal{X}$, donner le plus petit $k > 0$ tel que $A\ \mathcal{S}^k\ A$.

($ii$) Pour $A, B \in \mathcal{X}$ tels que $card(A \cap B) = 2$, donner le plus petit $k > 0$ tel que $A\ \mathcal{S}^k\ B$.

($iii$) Pour $A, B \in \mathcal{X}$ disjoints ($A \cap B = \emptyset$), donner le plus petit $k > 0$ tel que $A\ \mathcal{S}^k\ B$, dans le cas où $n \geq 7$.

($iv$) Même chose, dans le cas où $n = 6$.

($v$) Décrire $\mathcal{S}^+$, la fermeture transitive de $\mathcal{S}$ ; est-elle réflexive ? symétrique ?

NB : Vous pouvez vous aider de dessins : •—•—• ou diagrammes de Venn.

**(2)** On a un jeu de cartes ordinaire comprenant 52 cartes de 13 *figures* (**1**, ..., **10**, valet **J**, dame **Q** et roi **K**) dans chacune des 4 *couleurs* (coeur ♡, carreau ♢, trèfle ♣ et pique ♠). On appelle une *donne* un choix de 5 cartes *non ordonnées*. Donner une formule pour le nombre de donnes où les 5 figures sont mutuellement distinctes et où on a les 4 couleurs.

**(3)** Soit $E$ un ensemble fini, $f : E \to E$ et $x \in E$. On a $f^4(x) = f^{10}(x) = f^{19}(x)$ et $f^3(x) \neq f^6(x) \neq f^4(x)$. Donner la hauteur et la période de $x$.