UFR de Mathématique et d'Informatique
L3 Informatique S5, 2014-2015, semestre d'automne

Probabilités, Statistiques et Combinatoire

Contrôle Continu de Combinatoire, 6 octobre 2014

Durée : 1 heure

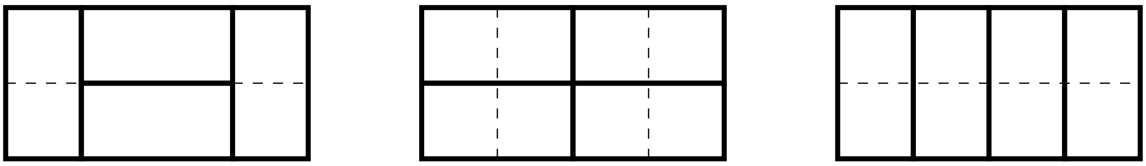
Tous documents (papier) autorisés mais non partagés

Calculettes inutiles

Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifier soigneusement les réponses

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $C(n)$ le nombre de pavages d'un rectangle $2 \times n$ par des dominos 1×2 placés horizontalement ou verticalement. Nous illustrons ci-dessous trois pavages possibles d'un rectangle 2×4 :



- (i) Donner les pavages d'un rectangle $2 \times n$ pour $n = 0, 1, 2, 3$, et déduire les valeurs de $C(0)$, $C(1)$, $C(2)$ et $C(3)$.
- (ii) Donner la relation de récurrence liant $C(n)$, $C(n+1)$ et $C(n+2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (Indication : regarder le placement d'un domino 1×2 dans le coin inférieur gauche du rectangle $2 \times (n+2)$, puis dans le coin supérieur gauche, et enfin le pavage du reste).
- (iii) On définit la suite de Fibonacci F_n ($n \in \mathbb{N}$) : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, etc., par $F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $C(n)$ en termes des F_m.

(2) Soit R une relation sur un ensemble E. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) R est symétrique et transitive ;
- (ii) R est définie sur un sous-ensemble X de E, et est une relation d'équivalence sur X.

Montrer que X est unique et expliquer comment on peut déterminer X à partir de (i).

(3) Un ticket de tombola permet de gagner soit (a) une tablette, soit (b) un ballon de foot, soit (c) une cannette de soda, soit (d) rien du tout. Avec plusieurs tickets, les différents gains forment un assortiment de cadeaux, par exemple 2 tablettes, 1 ballon et 3 cannettes ; les assortiments diffèrent les uns des autres par le nombre de cadeaux de chaque sorte. Donner le nombre de différents assortiments de cadeaux pour 10 tickets de tombola.