UFR de Mathématique et Informatique
L3 Informatique S5, 2013-2014, semestre de printemps

Probabilités, Statistiques et Combinatoire

Contrôle Continu de Combinatoire, mars 2014

Corrigé

(1) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f(n)$ le nombre de répartitions en binômes de $2n$ étudiants.

(i) $f(0) = f(1) = 1$.

(ii) Étant donnés $2n+2$ étudiants, on identifie Untel. Le nombre de choix de binôme pour Untel est $2n+1$. Quand Untel a été mis en binôme avec un autre étudiant, le nombre de répartitions en binômes pour les $2n$ étudiants restants est $f(n)$. Donc $f(n+1) = (2n+1) \times f(n)$.

(iii) Vérifions que pour $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)$. Pour $n = 0$, $\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \prod_{\emptyset} = 1 = f(0)$ et pour $n = 1$, $\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = (2 \times 0 + 1) = 1 = f(1)$. Supposons la formule vraie pour n, $f(n) = \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)$, et montrons la pour $n+1$; par (ii) on a

$$f(n+1) = (2n+1) \times f(n) = (2n+1) \times \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \prod_{k=0}^{n}(2k+1) \ ,$$

donc la formule reste vraie pour $n+1$. Par induction, elle est vraie pour tout naturel.

(iv) Étant donnés $2n+1$ étudiants, le nombre de répartitions où un étudiant est seul et les $2n$ autres sont en binômes, est $f(n+1)$: on rajoute un $(2n+2)$-ième étudiant fictif, et pour toute répartition en n binômes des $2n+1$ étudiants, l'étudiant seul est mis en binôme avec l'étudiant fictif ; cela donne une bijection entre les répartitions de $2n+1$ étudiants en n binômes et 1 seul d'une part, et les répartitions de $2n+2$ étudiants en $n+1$ binômes d'autre part.

(2) Soit $R \subseteq A \times B$. Pour $a\ R\ b$ on a $b\ R^{-1}\ a$; de la suite $a\ R\ b$, $b\ R^{-1}\ a$, $a\ R\ b$, on déduit $a\ RR^{-1}R\ b$. Donc $R \subseteq RR^{-1}R$. Dans de nombreux cas, l'inclusion est stricte, p.ex. si $A = B = \mathbb{Z}$ et R est la relation $<$.

(3) Soit R la relation sur $\mathbb{N}^*$ (l'ensemble des naturels > 0) donnée par :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}^*, \quad x\ R\ y \iff \big(y = 2x \text{ ou } y = 2x+1\big) \ .$$

En fait, il est équivalent de dire que $x = \lfloor y/2 \rfloor$.

(i) Pour $x, y \in \mathbb{N}^*$ tels que $x\ R\ y$, la représentation binaire de x est obtenue à partir de celle de y en effaçant le bit le moins significatif (celui le plus à droite) ; réciproquement, la représentation binaire de y est obtenue en rajoutant à celle de x un bit à droite, auquel on affecte la valeur 0 ou 1.

(ii) Pour $x, y \in \mathbb{N}^*$ et un entier $n > 1$, on a $x\ R^n\ y$ ssi la représentation binaire de x est obtenue en effaçant dans celle de y les n bits les moins significatifs (les plus à droite), c.-à-d.

la représentation binaire de y est obtenue en rajoutant à celle de x n bits à droite, auxquels on donne à chacun une valeur 0 ou 1 au choix.

En d'autres termes, on a $x = \lfloor y/2^n \rfloor$, réciproquement il existe k tel que $0 \leq k \leq 2^n - 1$ et $y = 2^n x + k$. Cela se vérifie par induction : c'est vrai pour $n = 1$, et pour $n+1$, $x \; R^{n+1} \; y$ donne $x \; R^n \; z \; R \; y$, donc $z = \lfloor y/2 \rfloor$ et $x = \lfloor z/2^n \rfloor = \lfloor \lfloor y/2 \rfloor / 2^n \rfloor = \lfloor y/2^{n+1} \rfloor$, ainsi que $y = 2z + b$, $0 \leq b \leq 1$ et $z = 2^n x + k$, $0 \leq k \leq 2^n - 1$, donc $y = 2^{n+1} x + 2k + b$, où $0 \leq 2k + b \leq 2^{n+1} - 1$.

(iii) Décrire la fermeture transitive R^+ de R : pour $x, y \in \mathbb{N}^*$, on a $x \; R^+ \; y$ ssi la représentation binaire de x est obtenue en effaçant dans celle de y un nombre non nul de bits à droite, c.-à-d. $x = \lfloor y/2^n \rfloor$ pour un $n > 0$. Réciproquement, cela veut dire que la représentation binaire de y est obtenue en rajoutant à celle de x un nombre non nul de bits à droite.

(iv) Pour tout $y \in \mathbb{N}^*$ on a $1 \; R^* \; y$. En effet, y s'écrit avec un nombre $n \geq 1$ de bits, dont le plus significatif (celui le plus à gauche) est 1 ; en effaçant les $n-1$ bits les moins significatifs, il reste juste ce bit 1 ; en d'autres termes, il existe $n \geq 1$ tel que $2^{n-1} \leq y < 2^n$, donc $\lfloor y/2^{n-1} \rfloor = 1$. Donc la relation d'équivalence $\approx$ engendrée par R est la relation totale $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$: pour $y, z \in \mathbb{N}^*$, $1 \; R^* \; y$ et $1 \; R^* \; z$, donc $1 \approx y$ et $1 \approx z$, ce qui donne par symétrie $y \approx 1$ et par transitivité $y \approx z$.