UFR de Mathématique et Informatique
L3 Informatique S5, 2013-2014, semestre de printemps

Probabilités, Statistiques et Combinatoire

Contrôle Continu de Combinatoire, mars 2014

Durée : 1 heure

Tous documents (papier) autorisés mais non partagés
Calculettes inutiles
Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifier soigneusement les réponses

(1) Un nombre pair d'étudiants doit être réparti en binômes pour un projet. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f(n)$ le nombre de répartitions en binômes de $2n$ étudiants.

(i) Donner $f(0)$ et $f(1)$.

(ii) Étant donnés $2n+2$ étudiants, on identifie un étudiant particulier Untel (le premier inscrit). Combien de choix de binôme y a-t-il pour Untel ? Quand Untel a été mis en binôme avec un autre étudiant, combien y a-t-il de répartitions en binômes pour les $2n$ étudiants restants ? En déduire la relation entre $f(n+1)$ et $f(n)$.

(iii) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)$.

(iv) Étant donnés $2n+1$ étudiants, montrer que le nombre de répartitions où un étudiant est seul et les $2n$ autres sont en binômes, est $f(n+1)$.

(2) Pour une relation $R \subseteq A \times B$, comparer R et $RR^{-1}R$.

(3) Soit R la relation sur $\mathbb{N}^*$ (l'ensemble des naturels > 0) donnée par :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}^*, \quad x\ R\ y \iff \big(y = 2x \text{ ou } y = 2x+1\big) \ .$$

(i) Pour $x, y \in \mathbb{N}^*$ tels que $x\ R\ y$, comparer les représentations binaires (en base 2, avec des bits) de x et y.

(ii) Pour $x, y \in \mathbb{N}^*$ et un entier $n > 1$, quand a-t-on $x\ R^n\ y$? (regarder les bits !)

(iii) Décrire la fermeture transitive R^+ de R : pour $x, y \in \mathbb{N}^*$, quand a-t-on $x\ R^+\ y$?

(iv) Pour quels $y \in \mathbb{N}^*$ a-t-on $1\ R^*\ y$? En déduire la relation d'équivalence engendrée par R.