UFR de Mathématique et Informatique
L3 Informatique S5 et S6, 2013-2014, semestre d'automne

Probabilités, Statistiques et Combinatoire

Contrôle Continu de Combinatoire, octobre 2013

Durée : 1 heure

Tous documents (papier) autorisés mais non partagés
Calculettes inutiles
Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifier soigneusement les réponses

(1) Donner le nombre de quintuplets d'entier relatifs, $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}^5$, satisfaisant les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 &\geq -2 \ , \\ x_2 &\geq +3 \ , \\ x_3 &\geq -1 \ , \\ x_4 &\geq +5 \ , \\ x_5 &\geq -4 \ , \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 40 \ . \end{aligned}$$

(2) Soit $f : E \to E$ telle que $f^8 = f^5$. Montrer que les 4 énoncés suivants sont équivalents :

(i) f est injective ;
(ii) f est surjective ;
(iii) f est bijective ;
(iv) $f^3 = Id_E$.

(Rappel : Id_E désigne l'identité sur E, c.-à-d. pour tout $x \in E$ on a $Id_E(x) = x$. Pour une application $f : E \to E$ et $n \in \mathbb{N}$, f^n désigne la composition de n fois f, c.-à-d. $f^0 = Id_E$, et pour $n > 0$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.)
Indication : vous pouvez utiliser l'existence d'un inverse à gauche / droite pour une injection / surjection.

(3) Soit R la relation sur $\mathbb{N}$ (l'ensemble des naturels) donnée par :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad x \; R \; y \iff \big(y = x + 3 \text{ ou } y = x + 5\big) \ .$$

Donner la relation d'équivalence engendrée par R, c.à-d. $(R \cup R^{-1})^*$.