UFR de Mathématique et Informatique
L3 Informatique S6, 2012-2013, semestre de printemps

Probabilités, Statistiques et Combinatoire

Contrôle Terminal, partie "Combinatoire" — 2ème session de juin 2013

Durée conseillée : 40 minutes

Documents autorisés : uniquement les 9 polycopiés de combinatoire

Téléphones, calculettes et ordinateurs éteints et rangés dans un sac fermé

Justifier soigneusement les réponses

(1) Soit E un ensemble *fini* et soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des couples de sous-ensembles disjoints de E, c.-à-d. des couples (A, B), où $A \subseteq E$, $B \subseteq E$ et $A \cap B = \emptyset$. On définit la relation ρ sur $\mathcal{K}$ comme suit : $(A, B)\ \rho\ (C, D)$ s'il existe $x \in A$ tel que $C = A \setminus \{x\}$ et $D = B \cup \{x\}$; en d'autres termes, on obtient (C, D) en enlevant un élément de A et en le rajoutant à B.

(i) Décrire ρ^n pour un entier $n \geq 0$. Pour $(A, B) \in \mathcal{K}$, quel est le plus grand n tel qu'il existe $(C, D) \in \mathcal{K}$ avec $(A, B)\ \rho^n\ (C, D)$? Décrire (C, D) pour un tel n.

(ii) Soit σ la relation d'équivalence engendrée par ρ. Pour $(A, B), (C, D) \in \mathcal{K}$, quand a-t-on $(A, B)\ \sigma\ (C, D)$?

(2) On a 23 sportifs, 11 garçons et 12 filles. Chacun possède deux maillots, un rouge et un bleu. Donner les formules pour le nombre de choix d'une équipe :

(i) de 13 joueurs, avec 4 garçons en rouge, 2 garçons en bleu, 2 filles en rouge et 5 filles en bleu ;

(ii) de 11 joueurs, où toutes les filles sont en bleu et tous les garçons en rouge ;

(iii) de 9 joueurs, avec 1 fille en bleu, toutes les autres filles en rouge, 1 garçon en rouge et tous les autres garçons en bleu.