UFR de Mathématique et Informatique
L3 Informatique S6, 2012-2013, semestre de printemps

Probabilités, Statistiques et Combinatoire

Contrôle Continu de Combinatoire, mars 2013

Durée : 1 heure

Tous documents (papier) autorisés mais non partagés
Calculettes inutiles
Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifier soigneusement les réponses

(1) Un jury de 45 experts compare 4 fromages : brie, camembert, gruyère et munster. Chacun vote sur un bulletin où il classe ces fromages par ordre de préférence : le 1er, le 2ème, le 3ème et le 4ème.

(i) Combien de votes différents chaque expert peut-il émettre ?

(ii) On suppose que le vote est nominatif : chaque expert inscrit son nom sur son bulletin, et le procès-verbal indique en face de chaque nom son vote. Combien de votes différents sont-ils possibles sur le procès-verbal ?

(iii) On suppose que le vote est anonyme : les bulletins de vote ne comprennent aucune mention de nom, et sont placés par chacun dans une urne. Après dépouillement, combien de votes différents sont-ils possibles ?

(iv) Après le vote, on remplit un tableau à 4 lignes et 4 colonnes ; chaque ligne correspond à un fromage (B, C, G ou M), et chaque colonne à un rang (1er, 2ème, 3ème ou 4ème) ; dans la case à l'intersection d'un fromage X et d'un rang n, on indique le nombre de bulletins de vote où le fromage X a été classé n-ième. Que peut-on dire des lignes et des colonnes de ce tableau ?

(2) Soient P et Q deux ensembles ordonnés par les relations d'ordre $\leq$ sur P et $\preceq$ sur Q, avec les ordres stricts $<$ et $\prec$, et soit $f : P \to Q$ une application. On définit la relation $\models$ sur P comme suit : pour $p, q \in P$, on a $p \models q$ si et seulement si soit $f(p) \prec f(q)$, soit $f(p) = f(q)$ et $p \leq q$.

(i) Montrer que $\models$ est une relation d'ordre sur P.

(ii) Montrer que si les relations d'ordre $\leq$ et $\preceq$ sont totales (sur P et Q respectivement), alors la relation d'ordre $\models$ sur P est totale.

(3) Soit $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs. On considère la fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie comme suit :

$$f(z) = \begin{cases} -z+1 & \text{si } z \geq 2, \\ -z-1 & \text{si } z \leq -2, \\ -z & \text{si } |z| \leq 1. \end{cases}$$

(i) Comparer $|z|$ et $|f(z)|$ pour $z \in \mathbb{Z}$.

(ii) Quels sont les cycles attracteurs de f, quelle est leur période ?