UFR de Mathématique et Informatique
L3 Informatique S6, 2012-2013, semestre d'automne

Probabilités, Statistiques et Combinatoire

Contrôle Continu de Combinatoire, novembre 2012

Durée : 1 heure

Tous documents (papier) autorisés mais non partagés
Calculettes inutiles
Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifier soigneusement les réponses

(1) On a 20 filles et 25 garçons. Donner le nombre de choix distincts pour former une équipe de 11 personnes parmi lesquelles on en distingue 4 qui forment un comité, avec la contrainte que le comité doit comprendre au moins une fille et au moins un garçon. Deux choix sont considérés distincts s'ils diffèrent soit dans la composition de l'équipe, soit dans la composition du comité ; il n'y a aucun ordre au sein du comité ni dans le reste de l'équipe.

Indication : composer le comité avant le reste de l'équipe.

NB : il n'est pas nécessaire de calculer la valeur arithmétique des formules données.

(2) Soit $\Sigma = \{0, 1\}$ et soit Σ^* l'ensemble des mots sur Σ. On donne à Σ^* une structure d'arborescence dont la racine est le mot vide ε, et où les fils du mot $c_1 \cdots c_n$ sont les 2 mots $c_1 \cdots c_n 0$ et $c_1 \cdots c_n 1$. On fait un parcours en largeur de cette arborescence, où on visite successivement les mots de longueur 0, puis 1, puis 2, etc. ; pour un n donné, la visite des mots de longueur $n+1$ (après ceux de longueur n) se fait comme suit : $c_1 \cdots c_n 0$ est visité juste avant $c_1 \cdots c_n 1$, et si $c_1 \cdots c_n$ a été visité avant $d_1 \cdots d_n$, alors $c_1 \cdots c_n 1$ sera visité avant $d_1 \cdots d_n 0$. Nous montrons ci-dessous les 3 premiers niveaux, visités de haut en bas et de gauche à droite :

$$
\begin{array}{lcccc}
\text{niveau } 0 \longrightarrow & & \varepsilon & & \\
& \swarrow & & \searrow & \\
\text{niveau } 1 \longrightarrow & 0 & & 1 & \\
& \swarrow\downarrow & & \swarrow\downarrow & \\
\text{niveau } 2 \longrightarrow 00 & 01 & & 10 & 11
\end{array}
$$

Questions : Définir mathématiquement cet ordre de visite du parcours ; pour deux mots $a_1 \cdots a_m$ et $b_1 \cdots b_n$, expliciter comment on détermine celui visité avant l'autre. Cet ordre est-il total ?

(3) Soit R la relation binaire définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des naturels comme suit :

$$\forall\, m, n \in \mathbb{N}, \quad m\, R\, n \iff [m = 2n \text{ ou } m = 3n \text{ ou } 2m = n \text{ ou } 3m = n] \ .$$

Questions : Décrire la fermeture transitive R^+ de R ; expliciter pour $m, n \in \mathbb{N}$ sous quelles conditions on a $m\, R^+\, n$. Cette fermeture R^+ est-elle une relation d'équivalence ?

Indication : tout naturel > 0 se factorise en un produit de puissances de nombres premiers.