UFR de Mathématique et Informatique
L3 Informatique S6, 2011-2012, semestre de printemps

Probabilités, Statistiques et Combinatoire

Contrôle Continu de Combinatoire, mars 2012

Corrigé

(1) *Raisonnement par contradiction :* Supposons que l'ordre $\sqsubseteq$ soit total. Par (ii) il existe $x, y \in E$ tels que $x \preceq y$ et $x \not\sqsubseteq y$. Comme l'ordre $\sqsubseteq$ est total et $x \not\sqsubseteq y$, on a $y \sqsubseteq x$. Par (i) on déduit que $y \preceq x$. Comme $x \preceq y$ et $y \preceq x$, l'antisymétrie de $\preceq$ donne $x = y$. Mais alors la réflexivité de $\sqsubseteq$ donne $x \sqsubseteq y$, ce qui contredit $x \not\sqsubseteq y$.

Raisonnement direct : Par (ii) il existe $x, y \in E$ tels que $x \preceq y$ et $x \not\sqsubseteq y$. La réflexivité de $\sqsubseteq$ (en version contraposée) donne alors $x \neq y$. Comme $x \preceq y$ et $x \neq y$, l'antisymétrie de $\preceq$ (en contraposé) donne $y \not\preceq x$. Mais alors la contraposée de (i) donne $y \not\sqsubseteq x$. Comme $x \not\sqsubseteq y$ et $y \not\sqsubseteq x$, l'ordre $\sqsubseteq$ n'est pas total.

(2) Pour $a \in \mathbb{Z}$, soit $a \bmod 9$ le reste de la division entière de a par 9, c.-à-d. l'unique entier b tel que $0 \leq b < 9$ et $a - b$ est un multiple de 9. Alors la congruence $n \equiv m \pmod 9$ signifie que $n \bmod 9 = m \bmod 9$.

(a) On a $10n + 1 = 9n + n + 1 \equiv n + 1 \pmod 9$. Donc pour $n \not\equiv 8 \pmod 9$ on a $(10n + 1) \bmod 9 = (n \bmod 9) + 1$ tandis que pour $n \equiv 8 \pmod 9$ on a $(10n + 1) \bmod 9 = 0 = (n \bmod 9) - 8$.

(b) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, si $m \not\equiv 0 \pmod 9$, on a $m \geq 1$, ainsi $f(m) = 10m + 1 > m \geq 1$, donc $f(m) = 1$ si et seulement si $m \equiv 0 \pmod 9$. Il s'ensuit que pour $n, k \in \mathbb{N}$, on a $f^k(n) = 1$ si et seulement si $f^{k-1}(n) \equiv 0 \pmod 9$. Pour $n \equiv 0 \pmod 9$, il suffit de prendre $k - 1 = 0$, donc $k = 1$. Pour $n \not\equiv 0 \pmod 9$, c.-à-d. $n \equiv 1, \ldots, 8 \pmod 9$, soit $t = 9 - (n \bmod 9) = 8, \ldots, 1$; en fait $t = (-n) \bmod 9$. En appliquant (a) par récurrence, pour $s = 1, \ldots, t$ on a $f^s(n) = 10f^{s-1}(n) + 1 \equiv n + s \pmod 9$, donc $f^t(n)$ est le premier qui est $\equiv 0 \pmod 9$. On a ainsi $k = t + 1 = [(-n) \bmod 9] + 1$; cette formule reste valable pour $n \equiv 0 \pmod 9$, car ici $k = 1 = [(-0) \bmod 9] + 1$. On peut aussi écrire

$$k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \pmod 9, \\ 10 - (n \bmod 9) & \text{si } n \not\equiv 0 \pmod 9. \end{cases}$$

(c) En appliquant f de façon répétée à 1, on obtient la suite

$$1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111, 111111111,$$

pour revenir ensuite sur 1, car $111111111 \equiv 0 \pmod 9$ (suite de 9 chiffres 1). On a donc un cycle de longueur 9. On sait par (b) que pour tout $n \in N$ il y a un $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k(n) = 1$, donc ce cycle est attracteur pour tous les entiers, c'est ainsi l'unique cycle attracteur. De plus, 1 est le seul point d'entrée du cycle : tout autre élément de ce cycle est de la forme $10m + 1 = f(m)$ pour l'élément précédent m du cycle, donc si $f(n) = 10m+1$, alors $n \not\equiv 0 \pmod 9$, donc $10n+1 = f(n) = 10m+1$, ce qui donne $n = m$, donc n est déjà dans le cycle. Par conséquent, la hauteur $h(n)$ de $n \in \mathbb{N}$ est 0 si n est dans le cycle (c.-à-d. n s'écrit comme suite de 1 à 9 chiffres 1), tandis que pour n hors du cycle, c'est l'entier k obtenu en (b) : $h(n) = [(-n) \bmod 9] + 1$.

(3) (a) *Première réponse :* Un partage est donné par une fonction définie sur l'ensemble des 3 enfants (en fait, de leurs identifiants) et à valeurs dans les naturels, qui donne pour chacun le nombre d'oranges qu'il reçoit ; la somme des 3 valeurs doit donner 15. C'est exactement le problème traité en haut de la page 6 du polycopié 8, donc la réponse est $\binom{k+a-1}{a-1}$ pour $a = 2$ et $k = 15$, c.-à-d. $\binom{17}{2}$.

Deuxième réponse : On fait le même raisonnement que dans la page 6 du polycopié 8. On aligne les 15 oranges et 2 séparateurs sur une rangée, de façon à avoir successivement : les oranges du 1er enfant, un séparateur, les oranges du 2ème enfant, un séparateur, les oranges du 3ème enfant. Cela revient à choisir 2 positions pour les séparateurs (indistinguables) parmi les $15 + 2$ positions, donc c'est $\binom{17}{2}$.

Troisième réponse : Soient n_1, n_2, n_3 les nombres d'oranges reçues par chacun des 3 enfants. On a les contraintes $0 \leq n_1 \leq 15$, $0 \leq n_2 \leq 15 - n_1$ et $n_3 = 15 - n_1 - n_2$. Donc pour chaque n_1 entre 0 et 15, il y a $15 - n_1 + 1$ choix pour n_2 (allant de 0 à $15 - n_1$), et ensuite n_3 est déterminé de façon unique. Cela donne en tout le nombre suivant de partages :

$$\sum_{n_1=0}^{15} (16 - n_1) = 16 + \cdots + 1 = (16 + 1) \times 16/2 = \binom{17}{2} .$$

(b) *Première réponse :* Un partage est donné par une fonction de l'ensemble des 15 livres (en fait, de leurs titres) vers l'ensemble des 3 enfants (en fait, de leurs identifiants), qui associe à chaque livre l'enfant qui le reçoit. Il y a 3^{15} telles fonctions.

Deuxième réponse : Pour chaque livre, il y a 3 choix pour l'enfant qui le reçoit. Comme il y a 15 livres et que ces choix se combinent indépendamment l'un de l'autre, cela fait 3^{15} choix.

NB. Il n'est pas écrit dans l'énoncé que les enfants vivent dans une société communiste, donc les réponses du type “un choix égal à 5 pour chacun” ne sont pas valables.

(4) *Cet exercice ressemble à l'exercice 2 du contrôle de novembre 2010, qui a été corrigé.*

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ la fonction qui associe à un entier $a > 0$ le plus grand entier m tel que a soit multiple de 2^m, c.-à-d. $a = 2^{f(a)} \times (2n + 1)$ pour un $n \in \mathbb{N}$; on pose $f(0) = \infty$ (puisque 0 est multiple de 2^m pour tout $m \in \mathbb{N}$).

Soit S la relation binaire sur $\mathbb{N}$ donnée par $a \ S \ b$ si et seulement si $f(a) = f(b)$, c.-à-d. soit $a = b = 0$, soit $a, b > 0$ et il existe $m, n_a, n_b \in \mathbb{N}$ tels que $a = 2^m(2n_a + 1)$ et $b = 2^m(2n_b + 1)$. Clairement, S est une relation d'équivalence. Pour $a \ R \ b$, on a soit $a = b = 0$, donc $f(a) = f(b) = \infty$, soit $a, b > 0$ et $b = (2n + 1) \times a$, donc $f(b) = f(2n + 1) + f(a) = f(a)$. Par conséquent S contient R.

Pour $a \ S \ b$, on a soit $a = b = 0$ et $a \ R^{-1} \ 0 \ R \ b$, soit $a, b > 0$ et $a = 2^m(2n_a + 1)$ et $b = 2^m(2n_b + 1)$, donc $2^m \ R \ 2^m(2n_a + 1) = a$ et $2^m \ R \ 2^m(2n_b + 1) = b$, ce qui donne $a \ R^{-1} \ 2^m \ R \ b$. Ainsi $S \subseteq R^{-1}R$. Toute relation d'équivalence contenant R doit contenir R^{-1} (par symétrie), d'où elle contient $R^{-1}R$ (par transitivité), ainsi elle contient S. Par conséquent S est bien la plus petite relation d'équivalence contenant R.