UFR de Mathématique et Informatique
L3 Informatique S6, 2011-2012, semestre de printemps

Probabilités, Statistiques et Combinatoire

Contrôle Continu de Combinatoire, mars 2012

Durée : 1 heure

Tous documents (papier) autorisés mais non partagés
Calculettes inutiles
Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifier soigneusement les réponses

(1) Soient $\sqsubseteq$ et $\preceq$ deux relations d'ordre sur un ensemble E, telles que $\sqsubseteq$ soit strictement incluse dans $\preceq$:

(i) inclusion : $\forall\, x, y \in E,\ x \sqsubseteq y \ \Rightarrow\ x \preceq y$.

(ii) stricte : $\exists\, x, y \in E,\ x \preceq y$ et $x \not\sqsubseteq y$.

L'ordre $\sqsubseteq$ peut-il être total ?

(2) On définit la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (où $\mathbb{N}$ est l'ensemble des naturels) par :

$$f(n) = \begin{cases} 10n + 1 & \text{si } n \not\equiv 0 \pmod{9}, \\ 1 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{9}. \end{cases}$$

(Ici $\ldots \equiv \ldots \pmod{9}$ désigne la congruence modulo 9.)

(a) Comparer n et $10n + 1$ modulo 9.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k(n) = 1$. Donner la valeur de k en fonction de la congruence de n modulo 9.

(c) Montrer que f a un unique cycle attracteur, décrire celui-ci (et sa longueur), et donner la hauteur d'un naturel n.

(3) Dans une répartition, les objets sont distinguables si l'identité des objets de chaque groupe compte, donc en permutant des objets de groupes différents la répartition change ; ils sont indistinguables si seul compte le nombre d'objets dans chaque groupe, donc en les permutant la répartition ne change pas. Donner une formule pour :

(a) le nombre de façons de partager 15 oranges entre 3 enfants, sachant que les oranges sont toutes de mêmes taille, forme et couleur, donc indistinguables.

(b) le nombre de façons de partager 15 livres entre 3 enfants, sachant que les livres ont des titres différents, donc sont distinguables (mais l'ordre de distribution des livres de chaque enfant n'est pas pris en compte).

NB : il n'est pas nécessaire de calculer la valeur arithmétique des formules données.

(4) Décrire la relation d'équivalence sur $\mathbb{N}$ (l'ensemble des naturels), engendrée par la relation binaire R sur $\mathbb{N}$ définie par $a\ R\ b$ si et seulement s'il existe un naturel n tel que $b = (2n + 1) \times a$.