UFR de Mathématique et Informatique
L3 Informatique S6, 2010-2011, semestre de printemps

Probabilités, Statistiques et Combinatoire

Contrôle Continu de Combinatoire, mars 2011

Durée : 1 heure

Tous documents (papier) autorisés

Calculettes inutiles

Téléphones et ordinateurs éteints et rangés dans un sac fermé

Justifier soigneusement les réponses

(1) On considère la fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ (où $\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers > 0) définie comme suit :

$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n \leq 100, \\ \lfloor n/2 \rfloor & \text{si } n > 100, \end{cases}$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier $\leq x$.

(i) Quels sont les cycles attracteurs de f, quelle est leur période ?

(ii) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la hauteur de n pour f, c.-à-d. le plus petit nombre de fois qu'il faut appliquer f à n pour entrer dans un cycle de f ?

(2) Soit $\sim$ la relation binaire sur $\mathbb{Z}^2$ (l'ensemble des couples d'entiers relatifs) définie par $(a, b) \sim (c, d)$ si et seulement si $(c, d) = (b, a)$ ou $(c, d) = (-a, -b)$.
Décrire la relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}^2$ engendrée par $\sim$, et ses classes d'équivalence.

(3) On a 30 filles et 20 garçons. Une équipe est un groupe formé à partir de ces 50 personnes. Donner une formule pour :

(i) le nombre d'équipes de 10 personnes avec au moins une fille et au moins un garçon ;

(ii) le nombre d'équipes de 6 personnes avec strictement plus de filles que de garçons;

(iii) le nombre d'équipes de 7 personnes avec un nombre pair de filles.

NB : il n'est pas nécessaire de calculer la valeur arithmétique des formules données.