UFR de Mathématique et Informatique
L3 Informatique
Combinatoire — 2008-2009

4ème feuille d'exercices

Justifier soigneusement les réponses

Exercice 1

Sachant que $10 = 13 - 3$, $100 = (13 \times 8) - 4$ et $1000 = (13 \times 77) - 1$,

a. donner la valeur de $10^n \; mod \; 13$ en fonction de n ($n \in \mathbb{N}$) ;

b. indiquer comment calculer $1234567890987654321 \; mod \; 13$ sans effectuer sur une calculette la division $1234567890987654321/13$.

Exercice 2

Un jeu de cartes comprend 32 cartes de 8 figures de 4 couleurs. On appelle une *donne* un choix de 5 cartes. Donner une formule pour les nombres :

a. de donnes ;

b. de donnes comprenant toutes les couleurs ;

c. de donnes comprenant au moins 2 couleurs ;

d. de carrés (donnes comprenant 4 cartes de même figure) ;

e. de fulls (donnes comprenant 3 cartes d'une figure et 2 cartes d'une autre figure).

Exercice 3

Pour tout entier strictement positif n, montrer que

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} \quad .$$

Que valent ces deux sommes ? Indication : calculer $(1 \pm 1)^n$.

Exercice 4

Pour $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$, montrer que

$$\sum_{j=m}^{n} \binom{j}{m} = \binom{n+1}{m+1} \ .$$

Indication : utiliser la récurrence avec la formule

$$\binom{u+1}{m+1} = \binom{u}{m} + \binom{u}{m+1} \ .$$

Exercice 5

a Pour $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq m \leq n$, montrer que

$$m\binom{n}{m} = n\binom{n-1}{m-1} \ ,$$

et pour $m \geq 2$ on a

$$m(m-1)\binom{n}{m} = n(n-1)\binom{n-2}{m-2} \ .$$

b Utiliser la première identité de (a) pour calculer

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \ .$$

c Utiliser les deux identités de (a) pour calculer

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} k^2 \binom{n}{k} \ .$$