Université de Strasbourg — UFR de Mathématique et Informatique
L2 Informatique

Combinatoire — 08-09

1ère feuille d'exercices

Justifier soigneusement les réponses

(1) Injections, surjections et bijections

On suppose admises les propriétés suivantes de la composition $f_2 \circ f_1$ de deux fonctions $f_1 : A_1 \to A_2$ et $f_2 : A_2 \to A_3$ (pour A_1, A_2, A_3 quelconques) :

(a) Si f_1 et f_2 sont injectives, alors $f_2 \circ f_1$ est injective.
(b) Si f_1 et f_2 sont surjectives, alors $f_2 \circ f_1$ est surjective.
(c) Si $f_2 \circ f_1$ est injective, alors f_1 est injective.
(d) Si $f_2 \circ f_1$ est surjective, alors f_2 est surjective.

(a) On considère trois applications $f : A \to B$, $g : B \to A$, et $h : B \to A$, telles que $g \circ f = Id_A$ et $f \circ h = Id_B$. Montrer que $h = g$. (Indication : calculer $g \circ f \circ h$).

(b) Soient $f : A \to B$ et $g : B \to A$. Montrer que :

(i) f et g sont bijectives si et seulement si $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bijectives.
(ii) f est une bijection et g est la bijection inverse de f si et seulement si $f \circ g = Id_B$ et $g \circ f = Id_A$.

(c) Soit $f : A \to B$ ($A, B \neq \emptyset$). Montrer que :

(i) f est injective si et seulement s'il existe une application $g : B \to A$ telle que $g \circ f = Id_A$. Que peut-on dire de g ?
(ii) f est surjective si et seulement s'il existe une application $g : B \to A$ telle que $f \circ g = Id_B$. Que peut-on dire de g ?

(2) Ensembles infinis

Construire des bijections $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ en partant des principes suivants :

(i) Tout entier > 0 se décompose de façon unique en un produit d'une puissance de 2 et d'un nombre impair, par exemple $120 = 8 \times 15 = 2^3 \times (2 \times 7 + 1)$.
(ii) En alternant les chiffres décimaux de deux entiers, on obtient ceux d'un troisième, par exemple $135, 427 \mapsto 143257$.

(3) Puissances composées d'ensembles

On connaît $\left(A^B\right)^C = A^{(B \times C)}$ pour les nombres, qu'en est-il pour les ensembles ?

(a) *Exemple pratique :*

En imagerie informatique, un niveau de gris correspond à une intensité lumineuse, et est codé par un entier compris entre 0 (correspondant au noir) et 255 (correspondant au blanc). Soit $T = \{0, 1, \ldots, 254, 255\}$ l'ensemble des niveaux de gris codés. Une couleur est codée par un triplet (r, v, b)

d'intensités correspondant aux composantes de rouge, verte et bleue de la couleur, avec $r, v, b \in T$. Donc l'ensemble des couleurs codées est T^3.

Une image est définie sur un rectangle E de pixels (taches lumineuses), on peut la considérer comme une fonction I associant à tout pixel $p \in E$ un niveau de gris ou une couleur, qu'on notera $I(p)$. Donc une image à niveaux de gris est une fonction $E \to T$ et une image en couleurs est une fonction $E \to T^3$.

Commenter les 3 affirmations suivantes, et dire dans chaque cas lequel de $\left(T^3\right)^E$, $T^{(\{0,1,2\}\times E)}$ et $\left(T^E\right)^3$ correspond à l'ensemble des images en couleurs :

- (a) Une image en couleurs associe à tout pixel une couleur à composantes rouge, verte et bleue.
- (b) Une image en couleurs est constituée d'un triplet d'images à niveaux de gris, qui donnent les composantes rouge, verte et bleue de l'image en couleurs.
- (c) Une image en couleurs correspond à une image à niveaux de gris définie sur un empilement de 3 rectangles identiques à E ; on a ainsi 3 couches correspondant aux composantes rouge, verte et bleue de l'image en couleurs.

(b) *Théorie :*
Etant donnés 3 ensembles A, B et C, décrire les éléments de $\left(A^B\right)^C$ et $A^{(B\times C)}$, et donner une bijection “naturelle” entre ces deux ensembles. En déduire une bijection entre $\left(A^B\right)^C$ et $\left(A^C\right)^B$.

(c) *Cas particulier :*
Posons $2 = \{0, 1\}$; on a une bijection entre $\mathcal{P}(E)$ et 2^E associant à toute partie de E sa fonction caratéristique. Appliquer l'exercice précédent au cas $A = 2$, et donner une bijection entre $\mathcal{P}(B)^C$ et $\mathcal{P}(B \times C)$. Illustrer cette bijection dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, en prenant pour B un intervalle sur l'axe X (horizontal) et pour C un intervalle sur l'axe Y (vertical).