

Traitement du Signal

Contrôle continu

Durée : 2 heures

Tous documents et calculettes autorisés

Téléphones portables interdits

Justifiez soigneusement vos réponses!

(1) Phase et amplitude

Soit $\nu > 0$. On considère la fonction de variable t donnée par

$$3 \cos(2\pi\nu t) + 4 \sin(2\pi\nu t) .$$

On peut l'exprimer sous la forme d'une cosinusoïde de fréquence ν , d'amplitude A et de phase φ :

$$A \cos(2\pi\nu t + \varphi) .$$

- (i) Donner une construction géométrique de A et φ .
- (ii) Calculer A .
- (iii) Donner une formule trigonométrique caractérisant φ .

(2) Modulation et filtrage

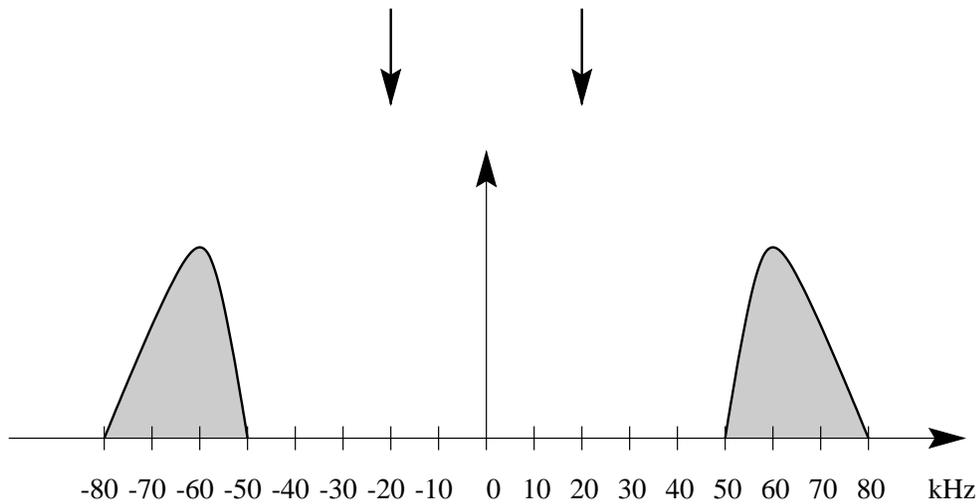
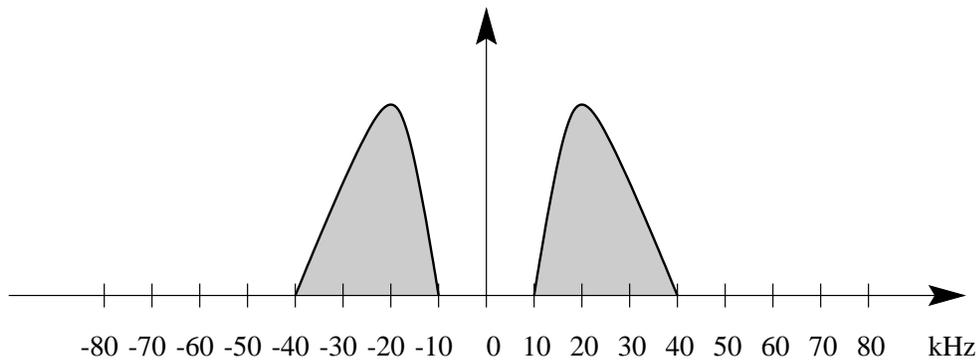
On dispose des appareillages suivants :

- (a) *un modulateur d'amplitude cosinusoidal*: celui-ci multiplie un signal $S(t)$ par la fonction cosinusoïde $\cos[2\pi f_m t]$, dont la fréquence f_m de modulation est réglable par l'utilisateur ;
- (b) *un filtre passe bas*: celui-ci enlève d'un signal toutes les fréquences dont la valeur absolue est supérieure à une fréquence de coupure f_c , cette fréquence étant réglable par l'utilisateur ;
- (c) *un filtre passe haut*: celui-ci enlève d'un signal toutes les fréquences dont la valeur absolue est inférieure à une fréquence de coupure f_c , cette fréquence étant réglable par l'utilisateur ;
- (d) *un amplificateur*: celui-ci multiplie un signal $S(t)$ par une constante A réglable par l'utilisateur.

On a un signal dont les fréquences positives s'échelonnent de 10kHz à 40kHz (donc le spectre de fréquences couvre les bandes $[-40, -10]$ et $[10, 40]$ sur un échelle en kHz). Expliquer comment on peut utiliser les appareillages (a, b, c, d) pour décaler le spectre de fréquences sur les bandes $[-80, -50]$ et $[50, 80]$ en kHz,

- (i) en décalant les fréquences positives de +40kHz ;
- (ii) en décalant les fréquences négatives de -40kHz.

(Voir la figure au verso.)



(3) Série de Fourier

On considère la fonction valeur absolue de cosinus : $|\cos(x)|$.

- (i) Donner sa période.
- (ii) Donner sa décomposition en série de Fourier en cosinus et sinus.

(4) Sous-échantillonnage

On mesure le temps en secondes, et les fréquences en Hertz. Soient S un signal analogique, et S_1 le signal échantillonné avec une fréquence de 10k (échantillons pris aux temps $z/10k$ pour $z \in \mathbb{Z}$). Soit S_2 le signal sous-échantillonné obtenu en ne gardant que les échantillons pairs de S_1 (c.à.d. pris aux temps $z/10k$ pour z pair).

- (i) Décrire ce que S_2 représente par rapport à S .
- (ii) Donner $\mathcal{F}(S_1)$ et $\mathcal{F}(S_2)$, les transformées de Fourier de S_1 et S_2 , en fonction de $\mathcal{F}(S)$, celle de S .