SÉRIES DE FOURIER

Christian RONSE, LSIIT UMR 7005 CNRS-ULP, Département d'Informatique de l'ULP

La décompostition d'une fonction périodique en série de Fourier représente un aspect de la transformée de Fourier : les coeeficients de la série donnent l'amplitude et la phase associées aux fréquences correspondantes, et la série donne la transformée de Fourier inverse, à savoir l'expression de la fonction en termes de sa transformée de Fourier.

Nous considérons les fonctions *périodiques de période* T (ou multiple de T), c.à.d. telles que $f(x+T) = f(x)$. On pourra se restreindre une telle fonction à l'intervalle $[0,T]$, et la considérer ainsi comme une fonction $[0,T] \to \mathbb{C}$.

PRODUIT HERMITIEN

On définit le produit hermitien de deux fonctions f et g par

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \overline{f(t)} g(t)\, dt \ ,$$

d'où on déduit la *norme* $||f||$ d'une fonction, définie par

$$||f||^2 = \langle f, f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2\, dt \ .$$

On vérifiera ainsi qu'une fonction à valeur constante c est de norme $|c|$.

DÉCOMPOSITION DANS UNE BASE DE HILBERT

L'ensemble des fonctions de période multiple de T (ou l'ensemble des fonctions définies sur $[0,T]$) et de norme finie, forme un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Une base (au sens traditionnel) de cet espace est un ensemble de fonctions linéairement indépendantes (aucune n'est combinaison linéaire des autres), et qui engendre l'espace par combinaisons linéaires (toute fonction est une combinaison linéaire des fonctions de la base).

En étendant la notion de combinaison linéaire (finie) à celle d'une série (combinaison linéaire infinie), on obtient la notion de *base de Hilbert* ; il s'agit d'un ensemble de fonctions de base e_s $(s \in S)$ telles que :

(i) Aucun de ces fonctions de base n'est obtenue comme série combinant les autres, c.à.d.

$$\forall s \in S, \lambda_t \in \mathbb{C}\ (t \in S, t \neq s), \qquad e_s \neq \sum_{t \in S, t \neq s} \lambda_t e_t \ ;$$

(ii) Toute fonction f est obtenue comme série combinant les fonctions de base, c.à.d.

$$\exists \lambda_s \in \mathbb{C}\ (s \in S), \qquad f = \sum_{s \in S} \lambda_s e_s \ .$$

Dans le cas où cette base est *orthogonale*, c.à.d. $\langle e_s, e_t \rangle = 0$ pour $s \neq t$, on peut trouver les coeficients de la décomposition en série d'une fonction grâce au produit hermitien de cette fonction avec les fonctions de base. En effet,

$$f = \sum_{s \in S} \lambda_s e_s$$

implique que pour $t \in S$, $\langle e_t, f \rangle = \lambda_t \langle e_t, e_t \rangle$, donc

$$\lambda_t = \frac{\langle e_t, f \rangle}{||e_t||^2} \ .$$

Le cas le plus intéressant est lorsque cette base est *orthonormée*, c.à.d.

$$\langle e_s, e_t \rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } s \neq t \ , \\ 1 & \text{if } s = t \ , \end{cases}$$

car on obtient alors

$$\lambda_t = \langle e_t, f \rangle \ .$$

SÉRIE EN EXPONENTIELLES IMAGINAIRES OU CISOIDES

On prend la base de Hilbert formée des fonctions e_z ($z \in \mathbb{Z}$) qui sont les cisoides (exponentielles imaginaires) de fréquence z/T :

$$e_z(t) = e^{2\pi i\, zt/T} \ .$$

Cette base est orthonormée, donc toute fonction f (de période multiple de T et de norme finie) aura la décomposition

$$f = \sum_{z \in \mathbb{Z}} c_z\, e_z, \qquad \text{où} \qquad c_z = \langle e_z, f \rangle \, ,$$

en d'autres termes la série de Fourier

$$f(t) = \sum_{z \in \mathbb{Z}} c_z\, e^{2\pi i\, zt/T}, \qquad \text{où} \qquad c_z = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2\pi i\, zt/T}\, dt \ .$$

SÉRIE EN COSINUS ET SINUS

On prend la base de Hilbert formée des fonctions cosinus c_n ($n \in \mathcal{N}$) et sinus s_n ($n \in N$, $n > 0$) de fréquence n/T :

$$c_n(t) = \cos(2\pi\, nt/T) \qquad \text{et} \qquad s_n(t) = \sin(2\pi\, nt/T) \ .$$

(On note que c_0 est la fonction constante 1). Cette base est orthogonale mais pas normée, puisqu'on a $\|c_0\|^2 = 1$, mais $\|c_n\|^2 = \|s_n\|^2 = 1/2$ pour $n > 0$. On obtient donc :

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, c_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\, s_n \ ,$$

avec

$$\begin{aligned} a_0 &= 2\, \frac{\langle c_0, f \rangle}{\|c_0\|^2} = 2\, \langle c_0, f \rangle \ , \\ a_n &= \frac{\langle c_n, f \rangle}{\|c_n\|^2} = 2\, \langle c_n, f \rangle \qquad (n > 0) \ , \\ b_n &= \frac{\langle s_n, f \rangle}{\|s_n\|^2} = 2\, \langle s_n, f \rangle \qquad (n > 0) \ . \end{aligned}$$

Cela donne ainsi la série de Fourier en cosinus et sinus :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, \cos(2\pi\, nt/T) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\, \sin(2\pi\, nt/T) \ ,$$

avec

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(2\pi\, nt/T)\, dt \qquad (n \geq 0) \ , \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(2\pi\, nt/T)\, dt \qquad (n > 0) \ . \end{aligned}$$