Université de Strasbourg **UFR de Mathématiques et Informatique**
L3S5 d'Informatique **Session de mai 2010**

Théorie des Langages

Contrôle Terminal

Durée : 3 heures
Responsable : Prof. Christian RONSE
Tous documents en papier autorisés mais non partagés
Calculettes inutiles
Téléphones et appareils électroniques éteints

Justifiez soigneusement vos réponses

(1) Langages algébriques.
Soient a, b, c trois symboles formant un alphabet. Parmi les langages suivants, déterminer ceux qui sont algébriques (hors-contexte). Dans l'affirmative, décrire la grammaire qui les engendre et donner un exemple de dérivation ; dans la négative, expliquer pourquoi.

(i) $\{a^n b^{2n} a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(ii) $\{a^n b^{2m} a^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.

(iii) $\{a^n b^{m+n} a^m \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.

(iv) $\{a^m b^n c^p d^{m+n} \mid m, n, p \in \mathbb{N}\}$.

(v) $\{a^m b^n c^{m \times n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.

(2) Miroir.
Pour un mot w, on écrit w^R pour le mot miroir formé de ses lettres concaténées dans l'ordre inverse (p.ex. $(leon)^R = noel$). Pour un langage L, soit $L^R = \{w^R \mid w \in L\}$ le langage miroir. Posons $L^P = \{w \cdot w^R \mid w \in L\}$. Utiliser les théorèmes vus en cours ou des raisonnements sur les expressions, automates ou grammaires pour répondre aux questions suivantes :

(i) Si L est rationnel, $L \cdot L^R$ est-il rationnel ? algébrique ?

(ii) Si L est rationnel, L^P est-il rationnel ? algébrique ?

(iii) Si L est algébrique, $L \cdot L^R$ est-il algébrique ?

(iv) Si L est algébrique, L^P est-il algébrique ?

(3) Langage déterministe.
Rappel : une pile est représentée par un mot, l'empilement et le dépilement se font *par la gauche*, donc le sommet de la pile se trouve à *gauche*, tandis que le fond de la pile se trouve à *droite*. On peut représenter les entiers relatifs par une pile sur l'alphabet $\{p, m, Z\}$, où Z est le symbole de fond de pile, p et n représentent respectivement $+1$ et -1 ; ainsi 0 est codé par Z, $+3$ par $pppZ$ et -2 par mmZ.

(*i*) Décrire comment on réalise les opérations $x \mapsto x+1$, $x \mapsto x+2$, $x \mapsto x-1$ et $x \mapsto x-2$ selon une telle représentation, en fonction du contenu du sommet de la pile.

(*ii*) Soit L le langage sur l'alphabet $\{a, b\}$ comprenant tous les mots dont le nombre d'occurences de la lettre a est 2 fois le nombre d'occurences de la lettre b :

$$L = \{w \in (a \cup b)^* \mid |w|_a = 2|w|_b\} \ .$$

Décrire un automate à pile déterministe acceptant le langage $L \cdot \$$, où \$ est un symbole de "fin de lecture". Justifier son déterminisme.

(*iii*) Pensez-vous qu'on pourrait faire de même si on avait pris $|w|_a = 5|w|_b$ au lieu de $|w|_a = 2|w|_b$?

(4) Automate à deux piles.
On peut imaginer une généralisation d'un automate à pile, où il y aura deux piles au lieu d'une. Ici une transition s'écrira $\big((p, a, \beta_1, \beta_2), (q, \gamma_1, \gamma_2)\big)$, ce qui signifie qu'en lisant a, on passe de p à q en dépilant β_1 de la 1ère pile et β_2 de la 2ème pile, puis en empilant γ_1 dans la 1ère pile et γ_2 dans la 2ème pile. Décrire des automate à deux piles acceptant les langages suivants :

(*i*) $\{w \cdot w \mid w \in (a \cup b)^*\}$.

(*ii*) $\{w \cdot w^R \cdot w \mid w \in (a \cup b)^*\}$, où w^R désigne le miroir de w.

(5) Commutation de mots.
Soit Σ un alphabet, et soient $u, v \in \Sigma^*$ deux mots. Montrez que ces deux mots commutent, $u \cdot v = v \cdot u$, si et seulement si u et v sont puissances d'un même mot : $\exists\, w \in \Sigma^*$, $\exists\, m, n \in \mathbb{N}$, $u = w^m$ et $v = w^n$. (Indication : vous pouvez utiliser le Lemme de Lévy).

(6) Tiers des mots.
Soit L un langage rationnel sur l'alphabet Σ. Soit T le langage formé de tous les mots qui sont le premier tiers d'un mot de L (nécessairement de longueur multiple de 3) :

$$T = \{w \in \Sigma^* \mid \exists\, m \in \Sigma^*,\ |m| = 2|w|,\ w \cdot m \in L\} \ .$$

Montrer que T est rationnel en construisant un automate fini acceptant T ; cet automate sera construit à partir d'un automate fini déterministe M acceptant L, en partant de l'idée suivante : en lisant un mot, on traverse l'automate M à partir de l'état initial de façon habituelle, et en même temps on le traverse en sens inverse à partir des états finaux, en remontant les transitions à vitesse double, et les deux traversées vont se rencontrer quand on aura lu le premier tiers d'un mot reconnu par M (NB : la traversée en sens inverse visite plusieurs états simultanément, donc elle fait des transitions non pas entre des états, mais entre des ensembles d'états).