Université de Strasbourg **UFR de Mathématiques et Informatique**
Master 1 ILC et ISI **semestre d'automne**

Complexité et Calculabilité

Complexité : problèmes P, NP-complets et EXP

(1) Problèmes P (de complexité polynomiale) :

— Fermeture transitive en $O(n^3)$ d'une relation sur n points :
$FOR(j = 0, j \leq n, j{+}{+})DO \quad FOR(i = 0, i \leq n, i{+}{+})DO \quad FOR(k = 0, k \leq n, k{+}{+})DO$
$IF \quad (a_i\ R\ a_j\ AND\ a_j\ R\ a_k\ AND\ NOT\ a_i\ R\ a_k) \quad THEN \quad R = R \cup \{(a_i, a_k)\}.$

— Satisfiabilité d'un ensemble de clauses binaires (ou unaires) :
Y a-t-il une interprétation satisfaite par toutes les clauses $a_1 \vee b_1, \ldots, a_m \vee b_m$, $c_1, \ldots, c_n$, où $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_n$ sont soit des atomes p_i, soit des négations d'atomes $\neg p_i$?
Résolution par itération de coupures jusqu'à obtention ou non de la clause vide.

(2) Problèmes NP-complets (non-déterministes polynomiaux complets) :

Ici K est un entier constant arbitraire (en notation binaire).

— Satisfiabilité d'un ensemble de clauses. On peut le réduire à la satisfiabilité d'un ensemble de clauses de longueur au plus 3, en introduisant des variables supplémentaires : remplacer

$$\begin{aligned}
a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee a_4 \quad &\text{par} \quad a_1 \vee a_2 \vee q_3,\ \overline{q_3} \vee a_3 \vee a_4 \ \ , \\
a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee a_4 \vee a_5 \quad &\text{par} \quad a_1 \vee a_2 \vee q_3,\ \overline{q_3} \vee a_3 \vee q_4,\ \overline{q_4} \vee a_4 \vee a_5 \ \ , \\
a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee a_4 \vee a_5 \vee a_6 \quad &\text{par} \quad a_1 \vee a_2 \vee q_3,\ \overline{q_3} \vee a_3 \vee q_4,\ \overline{q_4} \vee a_4 \vee q_5,\ \overline{q_5} \vee a_5 \vee a_6 \ \ , \\
a_1 \vee \cdots \vee a_n \ (n \geq 5) \quad &\text{par} \quad \begin{cases} a_1 \vee a_2 \vee q_3, \\ \overline{q_i} \vee a_i \vee q_{i+1} \ (i = 3, \ldots, n-2), \\ \overline{q_{n-1}} \vee a_{n-1} \vee a_n \ \ , \end{cases}
\end{aligned}$$

où les q_i sont de nouvelles variables booléennes.

— MaxSat : pour un ensemble de clauses, y a-t-il une interprétation satisfaite par au moins K clauses ?

— Dans un graphe non orienté, existe-t-il un cycle Hamiltonien (passant exactement une fois par chaque sommet) ?

— Ensemble indépendant : dans un graphe non orienté, y a-t-il K sommets sans aucune arête reliant deux d'entre eux ?

— Clique : dans un graphe non orienté, y a-t-il K sommets avec une arête reliant chaque paire parmi eux ?

— Couverture de sommets (node cover) : dans un graphe non orienté, y a-t-il un ensemble C de sommets, tel que $|C| \leq K$, et chaque arête a une extrémité dans C ?

— Problème du voyageur de commerce : étant donnés n points $p_1, \ldots, p_n$ et la matrice $d(p_i, p_j)$ de distances mutuelles (où $d(p_i, p_i) = 0$ et $d(p_i, p_j) = d(p_j, p_i)$), trouver un chemin $p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}$ les visitant tous, qui minimise la somme des distances entre points successifs $\sum_{t=2}^{n} d(p_{i_{t-1}}, p_{i_t})$.

— Partition : Soient $a_1, \ldots, a_n$ des naturels représentés en notation binaire. Y a-t-il $P \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tel que $\sum_{i \in P} a_i = \sum_{i \notin P} a_i$?

— Havresac (knapsack) : Soient $a_1, \ldots, a_n$ des naturels représentés en notation binaire. Y a-t-il $P \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tel que $\sum_{i \in P} a_i = K$?

(3) Problèmes EXP (de complexité exponentielle) :

— L'ensemble des codages "M" de Machines de Turing M acceptant "M" après au plus $2^{|\text{“}M\text{”}|}$ transitions.