

Calculabilité et Complexité

Contrôle Continu n°3

Durée : 40 minutes

Responsable : Prof. Christian RONSE

Tous documents en papier autorisés mais non partagés

Calculatrices inutiles

Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifiez soigneusement vos réponses

(1) Semi-décidabilité et décidabilité.

On considère le problème suivant : étant donnée une machine de Turing M d'alphabet Σ , si M démarre avec l'entrée vide, va-t-elle au cours de son exécution écrire sur le ruban au moins la moitié des symboles de $\Sigma \setminus \{\triangleright, \sqcup\}$? En d'autres termes, l'ensemble

$$\{\sigma \in \Sigma \setminus \{\triangleright, \sqcup\} \mid \exists q \in K, \exists u, v \in \Sigma^*, (s, \triangleright \sqcup) \vdash^* (q, u \sigma v)\}$$

est-il de cardinal $\geq |\Sigma \setminus \{\triangleright, \sqcup\}|/2$? (NB : l'alphabet Σ n'est pas fixé, il dépend de M).

(i) Montrer que ce problème est semi-décidable.

(ii) Montrer que ce problème est indécidable.

Indication : pour (i), utiliser une variante de la machine de Turing universelle ; pour (ii), montrer que si c'était décidable, cela permettrait de décider l'arrêt d'une machine de Turing quelconque sur l'entrée vide (d'ailleurs on peut combiner des machines de Turing utilisant des alphabets différents).

(2) Complexité et miroir.

Le miroir w^R d'un mot w est le mot obtenu en inversant l'ordre des lettres ; pour $w = a_1 \cdots a_n$, $w^R = a_n \cdots a_1$; le miroir L^R d'un langage L est l'ensemble des miroirs des éléments de L : $L^R = \{w^R \mid w \in L\}$.

Question : si L appartient à une classe de complexité P, NP ou NP-complet, qu'en est-il de L^R ?

Indication : utiliser la réduction polynomiale.