Université de Strasbourg **UFR de Mathématiques et Informatique**
Master 1 ILC, ISI, CMI-IIRVIJ et CMI-ISR **14 novembre 2017**

Calculabilité et Complexité

Contrôle Continu n°2

Durée : 30 minutes
Responsable : Prof. Christian RONSE
Tous documents en papier autorisés mais non partagés
Calculettes inutiles
Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifiez soigneusement vos réponses

(1) Type de fonction.
Soit f la fonction unaire sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ est le plus grand $m \in \mathbb{N}$ tel que $A(m,m) \leq n+1$, où $A(\cdot,\cdot)$ est la fonction d'Ackermann-Péter.

(i) La fonction f est-elle bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c-à-d. existe-t-il toujours un $m \in \mathbb{N}$ tel que $A(m,m) \leq n+1$, et si oui en existe-t-il toujours un qui est le plus grand ? Que peut-on dire de la valeur de $f(n)$ comparée à n ?

(ii) Donnez un algorithme simple pour calculer $f(n)$ (en supposant qu'on a un algorithme calculant $A(m,m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$).

(iii) La fonction f est-elle μ-récursive ?

Rappel. La fonction d'Ackermann-Péter est une fonction à deux variables naturelles, définie par double récurrence comme suit :

$$A(0,n) = n+1 \ ,$$
$$A(m+1,0) = A(m,1) \ ,$$
$$A(m+1,n+1) = A\big(m, A(m+1,n)\big) \ .$$

Elle est μ-récursive et elle a les propriétés suivantes (pour tous naturels m,n) :

$$A(m+1,n) > A(m,n) \quad \text{(strictement croissante sur la 1e variable)} \ ,$$
$$A(m,n+1) > A(m,n) \quad \text{(strictement croissante sur la 2e variable)} \ ,$$
$$A(m,n) > n \ .$$

(2) Grammaire.
On a un alphabet $\Sigma = \{c_1, \ldots, c_n\}$ avec un ordre linéaire $<$ sur ses symboles, donné par $c_i < c_j$ ssi $i < j$. On définit la fonction $f : \Sigma^* \to \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ comme suit : $f(\varepsilon) = \varepsilon$ et pour un mot non vide w, $f(w)$ est le symbole dans w qui est le plus petit pour l'ordre $<$. Par exemple pour l'alphabet latin avec l'ordre alphabétique $a < b < \cdots < y < z$ on a :

$$f(g) = f(gg) = g \ ,$$
$$f(rebute) = b \quad \text{parce que } b < e < r < t < u \ ,$$
$$f(dodu) = d \quad \text{parce que } d < o < u \ .$$

Donnez une grammaire calculant la fonction f, en d'autres termes, pour tout $w, u \in \Sigma^*$, $SwS \ \Rightarrow^* \ u$ ssi $u = f(w)$. Donnez le calcul de $f(bac)$ par cette grammaire.